Seminar Sophus Lie
1 (1991) 235–242

Orbitmethode und unitäre Darstellungen für eine Gruppe lokaler, reell analytischer Diffeomorphismen

Frank Leitenberger

1. Einführung

Im folgenden betrachten wir die Gruppe G von Diffeomorphismen φ der reellen Geraden, die in einer Umgebung der Null definiert und reell analytisch sind, die Null als Fixpunkt besitzen und zusätzlich der Bedingung $\varphi'(0) = 1$ genügen. Offenbar bilden diese Diffeomorphismen in natürlicher Weise eine Gruppe mit der Multiplikation $\varphi \circ \psi(x) := \psi(\varphi(x))$.

Wir zeigen: *Jeder Orbit in der koadjungierten Darstellung von G ist entweder endlichdimensional oder (bis auf eine Faktorisierung durch eine Untergruppe mit verschwindender Lie-Unteralgebra) zu G isomorph.* Für einige spezielle Orbits werden mit Hilfe der Orbitmethode von Kirillov (s.[3]) unitäre Darstellungen konstruiert.

2. Die Gruppe G und ihre Lie-Algebra $\mathfrak{g}$

Die in Abschnitt 1 beschriebene Gruppe läßt sich offenbar auch folgendermaßen definieren:

Definition 1. Wir setzen $G = \{\varphi(x) = x + a_1x^2 + a_2x^3 + \cdots : a_n \in \mathbb{R}, \limsup |a_n|^{1/n} < \infty\}$. Auf G können wir eine topologische Struktur einführen. Dazu sei $G_R = \{\varphi(x) = a_0x + a_1x^2 + \cdots : a_n \in \mathbb{R}, \limsup |a_n|^{1/n} < 1/R\}$, und $|\varphi|_r := \sup\{\varphi(x) : |x| < r\}$, $r = R(1 - 1/n)$, $n > 1$ definiere ein Halbnormensystem auf dem Vektorraum G_R. Dann ist G_R ein Frechet-Raum. Wir versehen $\bigcup_{R>0} G_R$ mit der Topologie des induktiven Limes. Folglich ist G als Hyperebene $a_0 = 1$ ein topologischer Raum. In dieser Topologie ist G eine topologische Gruppe (s. [1]). ∎

Wir definieren weiter die zu G assoziierte Lie-Algebra g:

Definition 2. We setzen $\mathfrak{g} = \{v(x)\frac{d}{dx} : v(x) = b_1x^2 + b_2x^3 + \cdots, b_n \in \mathbb{R}, \limsup |b_n|^{1/n} < \infty\}$ mit der Lie-Klammer $[v(x)\frac{d}{dx}, w(x)\frac{d}{dx}] := (v(x)w'(x) - w(x)v'(x))\frac{d}{dx}$. Völlig analog zu G erlaubt $\mathfrak{g}$ eine Topologisierung als Folgenraum und ist dann eine topologische Lie-Algebra (s. [1]).

Bemerkung 3. $\mathfrak{g}$ und G sind durch die stetige Exponentialabbildung

$$\exp\colon \mathfrak{g} \to G, \quad v(x)\frac{d}{dx} \mapsto \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}(v(x)\frac{d}{dx})^k x$$

miteinander verknüpft. Die Funktion exp ist auf $\mathfrak{g}$ wohldefiniert, aber weder lokal injektiv noch surjektiv. Aber es gilt $\exp\mathfrak{g} \circ \exp\mathfrak{g} = G$. Weiterhin steht die Menge der einparametrigen stetigen Untergruppen von G in eineindeutiger Relation zu $\mathfrak{g}$ (s. [1]). ∎

3. Die koadjungierte Darstellung von G und $\mathfrak{g}$

Wir ermitteln zunächst den Dualraum $\mathfrak{g}^*$ von $\mathfrak{g}$. Mit Hilfe von [5] finden wir

$$\mathfrak{g}^* = \{p(x) = \frac{c_1}{x^3} + \frac{c_2}{x^4} + \frac{c_3}{x^5} + \cdots : c_n \in \mathbb{R},\ (\forall M > 0)\, c_n M^n \to 0\}$$

mit der Paarung

$$\langle p(x) \mid v(x)\frac{d}{dx}\rangle = \int_C p(x)v(x)\,dx = \sum_{i=1}^{\infty} b_i c_i,$$

wobei C ein (von p und v abhängender) hinreichend kleiner Kreis um die Null ist. Also besteht g^* aus auf ganz $(\mathbb{C}\cup\infty)\backslash\{0\}$ definierten holomorphen Funktionen (ohne $1/x$ und $1/x^2$ -Glied). Die starke Topologie kann durch das Halbnormensystem $|p|_M = \sup\{c_k M^k : k \in \mathbb{N}\}$ oder das äquivalente Halbnormensytem $|p|_r = \sup\{p(x) : r < |x|\}$ gegeben werden. Die topologischen Vektorräume $\mathfrak{g}$ und $\mathfrak{g}^*$ sind lokalkonvex und reflexiv (s. [5]).

Die adjungierte und koadjungierte Darstellungen können folgendermaßen gegeben werden:

Definition 4. Wir definieren

$$\begin{aligned}
\mathrm{ad}(v(x)\frac{d}{dx})(w(x)\frac{d}{dx} &= [v(x)\frac{d}{dx}, w(x)\frac{d}{dx}] \\
\mathrm{ad}\,\big(\varphi(x)\big)(w(x)\frac{d}{dx}) &= \big(w(\varphi(x)\big)\frac{1}{\varphi'(x)}\frac{d}{dx} \\
\langle K(v(x)\frac{d}{dx}), w(x)\frac{d}{dx}\rangle &= -\langle p(x), \mathrm{ad}(v(x)\frac{d}{dx})(w(x)\frac{d}{dx})\rangle \\
\langle K\big(\varphi(x)\big)p(x), w(x)\frac{d}{dx}\rangle &= \langle p(x), \mathrm{ad}\,\big(\varphi^{-1}(x)\big)w(x)\frac{d}{dx}\rangle.
\end{aligned}$$

Die Funktionen $\mathrm{ad}(v(x)\frac{d}{dx})$ und $\mathrm{ad}\,\varphi(x)$ sind stetige lineare Operatoren in $\mathfrak{g}$ (s. [1]). Somit sind auch die adjungierten Operatoren $K(v(x)\frac{d}{dx})$ und $K\big(\varphi(x)\big)$ wohldefiniert und stetig (s. [6]). Weiterhin sind ad und K stetige Darstellungen. ∎

Die jeweiligen Darstellungen der Lie-Algebra erhält man durch Differentiation in den Darstellungen der Gruppen entlang einparametriger Untergruppen. Wir setzen $\mathrm{LT}[\sum_{-\infty}^{\infty} a_n x^n] := \sum_{-3}^{\infty} a_n x^n$ und erhalten folgende explizite Formeln für K:

$$K(\varphi(x))p(x) = \mathrm{LT}[p\big(\varphi^{-1}(x)\big)(\varphi^{-1})'(x)^2]$$
$$K(v(x)d/dx)p(x) = \mathrm{LT}[v(x)p'(x) + 2v'(x)p(x)].$$

4. Koadjungierte Orbits

Sei $p \in \mathfrak{g}^*$. Unter einem *Orbit von p in der koadjungierten Darstellung* verstehen wir die Menge $O_p = \{K(\varphi)p : \varphi \in G\} \subseteq \mathfrak{g}^*$, und unter der *Stabilisatorgruppe von p* die Untergruppe $G_p = \{\varphi \in G : K(\varphi)p = p\}$. Es gilt offenbar $O_p \cong G/G_p$. Weiter sei $\mathfrak{g}_p$ die Lie-Algebra von G_p, d.h. $\mathfrak{g}_p = \{v(x)\frac{d}{dx} \in \mathfrak{g} : (\forall t \in R)\ \exp tv(x)\frac{d}{dx} \in G_p\}$. Es gilt auch

$$\mathfrak{g}_p = \{v(x)\frac{d}{dx} \in \mathfrak{g} : K((v(x)\frac{d}{dx})p = 0\}.$$

Im allgemeinen erzeugt $\exp \mathfrak{g}_p$ aber nicht ganz G_p, da G_p aus mehreren Zusammenhangskomponenten bestehen kann.

Satz 5. (i) *Ist p finit, so ist O_p endlichdimensional und besteht aus finiten Elementen gleichen Grades.*

(ii) *Ist p infinit, so besteht O_p nur aus infiniten Elementen.*

Beweis. $K(\varphi)$ hat in Matrixform folgende Gestalt

$$K(\varphi)\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ \vdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & p_{12} & p_{13} & \cdots \\ 0 & 1 & p_{23} & \cdots \\ 0 & 0 & 1 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ \vdots \end{pmatrix}.$$

Wir sehen, daß finite Vektoren $p \in \mathfrak{g}^*$ in solche von gleichem Grade übergeführt werden und infinite Vektoren in infinite, da sonst mit den inversen Gruppenelementen finite in infinite Vektoren übergeführt werden. Weiter ist O_p für finite p endlichdimensional als Teilmenge des endlichdimensionalen Vektorraumes aller Laurent-Polynome gleichen oder kleineren Ranges.

Satz 6. *Ist p infinit, so gilt $\mathfrak{g}_p = 0$.* ■

Mit anderen Worten und etwas genauer:

Bemerkung 7. Es gibt eine Untergruppe G_d von G mit verschwindender Lie-Unteralgebra derart, daß $O_p \cong G/G_d$ gilt.

Beweis. Zu zeigen ist: Aus $K(v(x)\frac{d}{dx})p(x) = 0$ folgt $v(x) = 0$. Die Voraussetzung hat in Matrixform folgende Gestalt:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & b_2 & 2b_3 & 3b_4 & 4b_5 & \cdots \\ 0 & 0 & -b_1 & 0 & b_3 & 2b_4 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & -2b_1 & -b_2 & 0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ \vdots \end{pmatrix} = 0.$$

Eine Umordnung ergibt (mit der absoluten Summierbarkeit wegen der Köthe-Dualität von $\mathfrak{g}$ und g^* (s. [5]))

$$\begin{pmatrix} 0 & c_3 & 2c_4 & 3c_5 & \cdots \\ -c_3 & 0 & c_5 & 2c_6 & \cdots \\ -2c_4 & -c_5 & 0 & c_7 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \end{pmatrix} =: C(p)v(x)\frac{d}{dx} = 0.$$

Hierbei ist $C(p)\colon \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}^*$ ein stetiger linearer Operator, da K eine stetige Darstellungist. $C(p)^\top$ wirkt ebenfalls von $\mathfrak{g}^{**} = \mathfrak{g}$ nach $\mathfrak{g}^*$ und es gilt $C(p)^\top = -C(p)$. Es bleibt zu zeigen,daß $\ker C(p) = 0$. Nun gilt (s. [6]): $\ker C(p) = (\operatorname{im} C(p)^\top)^\perp = (\operatorname{im} C(p))^\perp$. Das heißt, es genügt zu zeigen, daß sich die Vektoren $(0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots) \in \mathfrak{g}^*$ durch Spalten von $C(p)$ approximieren lassen. Wir beweisen hier nur den einfachsten Fall $(1, 0, \ldots)$. Dazu zeigen wir

$$\liminf \left| \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \end{pmatrix} - \frac{1}{(n-2)c_n} \begin{pmatrix} (n-2)c_n \\ (n-3)c_{n+1} \\ (n-4)c_{n+2} \\ \vdots \end{pmatrix} \right|_M = 0 \text{ for all } M > 0,$$

denn dann gibt es offenbar eine gegen $(1, 0, \ldots)$ konvergente Teilfolge. Angenommen der untere Grenzwert ist nicht 0, dann folgt

$$(\exists M,\, \varepsilon < 1) \sup_{k>1} \left| \frac{(n-k-2)c_{n+k}}{(n-2)c_n} M^{k(n)} \right| > \varepsilon \text{ for all } n$$

Die Ungleichung werde jeweils für k(n) angenommen. Dann folgt

$$\begin{aligned} \varepsilon &< \left| \frac{(n-k(n)-2)c_{n+k(n)}}{(n-2)c_n} M^{k(n)} \right| = \left| \frac{(n+k(n)-2)(n-k(n)-2)c_{n+k}}{(n-2)(n+k(n)-2)c_n} M^{k(n)} \right| \\ &< \left| \frac{(n+k(n)-2)c_{n+k(n)}}{(n-2)c_n} M^{k(n)} \right|. \end{aligned}$$

Mit $M' = \frac{M}{\varepsilon}$ folgt

$$\left| \frac{(n+k(n)-2)c_{n+k(n)}}{(n-2)c_n} \right| > \frac{\varepsilon}{M^{k(n)}} > \left(\frac{\varepsilon}{M}\right)^{k(n)} = \frac{1}{M'^{k(n)}},$$

d.h. es existiert eine Teilfolge $(n_i - 2)c_{n_i} > C\frac{1}{M'^{n_i}}$. Das ist ein Widerspruch zu $c_n \in \mathfrak{g}^*$. ■

5. Konstruktion koadjungierter Darstellungen mit Hilfe der Orbitmethode

Die Orbitmethode für eine endlichdimensionale nilpotente Lie-Gruppe nach Kirillov. Es sei G eine endlichdimensionale, einfach zusammenhängende nilpotente Lie-Gruppe und $\mathfrak{g}$ ihre Lie-Algebra. Ω sei ein koadjungierter Orbit und

$p \in \Omega$. Wir nennen eine Unteralgebra $\mathfrak{h}$ *dem Element p untergeordnet*, falls $\langle p, [h,h]\rangle = 0$. Nun sei $\mathfrak{h}$ maximal in der Menge der p untergeordneten Unteralgebren und H die zugehörige Gruppe $H = \exp \mathfrak{h}$. Durch $u\colon \mathfrak{h} \ni x \mapsto i\langle p, x\rangle \in i\mathbb{R}$ wird eine eindimensionale Darstellung von $\mathfrak{h}$ definiert. Wegen des einfachen Zusammenhangs von H bestimmt sie eindeutig eine Darstellung $U\colon H \to \mathrm{U}(1)$ durch $U(\exp x) = e^{i\langle p,x\rangle}$ der Gruppe H. Die Isomorphieklasse der von ihr induzierten Darstellung $\mathrm{Ind}_H^G U$ ist, wie man zeigen kann, unabhängig von $p \in \Omega$ und $\mathfrak{h}$.

Definition 8. $\mathrm{Ind}_H^G U$ heißt *Darstellung zum Orbit Ω*. ∎

Theorem 9. (KIRILLOV, s. [4])(i) *$\mathrm{Ind}_H^G U$ ist irreduzibel.*

(ii) *Die Methode liefert alle unitären Darstellungen.*

(iii) *Darstellungen zu Orbits Ω und Ω' sind genau dann äquivalent, wenn $\Omega = \Omega'$ gilt.* ∎

Wir wollen nun obige Konstruktionsvorschrift auf unsere unendlichdimensionale Gruppe G übertragen. Dies ist in allen Schritten möglich, bis auf eine Ausnahme: als Darstellungsraum von Ind_H^G wird anstatt $L_2(G/H, \mu)$ der Raum $L_2(\mathbb{R}^\infty, \mu)$ gewählt, wobei $\mathbb{R}^\infty$ sich als eine gewisse Vervollständigung von G/H erweisen wird. Als besondere Schwierigkeit erweist sich dabei die Konstruktion der quasiinvarianten Maße μ auf dem nicht lokalkompakten Raum R^∞.

Konstruktion unitärer Darstellungen von G. Wir betrachten nur die speziellen Orbits O_p mit

$$p(x) = \frac{c_1}{x^3} + \frac{c_3}{x^5} + \frac{c_5}{x^7} + \cdots,$$

das heißt $c_{2i} = 0$. Wir bezeichnen die Erzeugenden $x^{i+1}\frac{d}{dx}$, $i > 1$ von $\mathfrak{g}$ mit L_i.

Satz 10. *Der Abschluß $\mathfrak{h}$ der linearen Hülle der Elemente $L_{2i} = x^{2i+1}\frac{d}{dx}$ ist eine maximale p untergeordnete Unteralgebra.*

Beweis. Es gilt $\langle p, [v,w]\rangle = \langle p, [\sum b_i L_i, \sum b_i' L_i]\rangle = \langle p, \sum b_i b_j'(j-i) L_{i+j}\rangle = \sum b_i b_j'(j-i) c_{i+j} = \langle v, C(p) w\rangle$. D.h. es ist zu zeigen, daß $\mathfrak{h}$ ein maximaler isotroper Unterraum von $C(p)$ ist. Dazu permutieren wir die Basisvektoren in der Matrixdarstellung von $C(p)$:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & \cdots & c_3 & 3c_5 & 5c_7 & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & -c_5 & c_7 & 3c_9 & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & -3c_7 & -c_9 & c_{11} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \\ -c_3 & c_5 & 3c_7 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & \cdots \\ -3c_5 & -c_7 & c_9 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & A \\ -A^\top & 0 \end{pmatrix}.$$

Nun ist die Isotropie des Unterraumes $\mathfrak{h}$ offensichtlich. Die Maximalität von $\mathfrak{h}$ entspricht der Aussage $\ker A = 0$. Dies wird analog wie in Bemerkung 7gezeigt. ∎

Für U ergibt sich mit der Orbitmethode die triviale Darstellung, da $\langle p, h\rangle = 0$. Wir geben jetzt eine explizite Beschreibung von G/H und der Wirkung von G auf G/H. Dazu bezeichnen wir den Raum aller geraden konvergenten Potenzreihen mit $\mathfrak{q}$.

Satz 11. *In jeder Rechtsnebenklasse liegt genau ein Element der Gestalt* $x + g(x)$, $g(x) = g_1x^2 + g_2x^4 + \cdots \in \mathfrak{q}$.

Beweis. Wir betrachten für jedes φ die Gleichung $G \ni \varphi = u \circ (x+g)$, $u \in \mathfrak{h}$, $g \in \mathfrak{q}$. Sie hat genau eine Lösung u, g, und zwar

$$(*) \qquad u(x) = P_u(\varphi(x)), \quad g(x) = P_g\varphi\big((P_u\varphi)^{-1}(x)\big).$$

Hierbei sind P_g, P_u die Projektoren auf den geraden bzw. ungeraden Anteil einer Potenzreihe. ■

Das gestattet die Identifikation $G/H \ni H \circ \varphi \leftrightarrow g(x) \in \mathfrak{q}$.

Satz 12. *Die Wirkung von* G *auf* G/H *hat die Gestalt* $T_\varphi\colon H\circ\psi \to H\circ\psi\circ\varphi^{-1}$,

$$T_\varphi g(x) = P_g\big(\varphi^{-1}(x+g)\big)\big[\big(P_u(\varphi^{-1}(x+g))\big)^{-1}(x)\big]$$

mit P_g, P_u *wie im Beweis von* Satz 11.

Beweis. Die Behauptung kann man aus Formel $(*)$ erkennen. ■

T_φ ist eine nichtlineare Wirkung auf dem Vektorraum der geraden Potenzreihen und ist mittels obiger Formel auf die Menge aller geraden formalen Potenzreihen übertragbar. Folglich gestattet jedes gegen alle Transformationen T_φ quasiinvariante Maß auf $\mathbb{R}^\infty$ eine unitäre Darstellung in $L_2(\mathbb{R}^\infty, \mu)$ gemäß

$$U_\mu(\varphi)f(g) = \Big(\frac{d\mu(T_\varphi g)}{d\mu(g)}\Big)^{\frac{1}{2}} f(T_\varphi g).$$

Es verbleibt die Existenz von quasiinvarianten Maßen zu zeigen.

Satz 13. *Auf* $\mathbb{R}^\infty \cong \mathfrak{q}$ *existieren bezüglich* G *quasiinvariante Maße, und somit existieren auch unitäre Darstellungen in* $L_2(\mathbb{R}^\infty, \mu)$.

Beweisskizze. Wir definieren in $\mathbb{R}^\infty$ das Skalarprodukt $(g, h) := \sum \frac{1}{\lambda_n} g_n h_n$. Der zugehörige Hilbertraum heiße $H \subset \mathbb{R}^\infty$. Es gilt $H \cong \ell_2$ vermöge der Transformation $g'_n = \frac{1}{\sqrt{\lambda_n}} g_n$. Es sei μ das Standardgaußmaß für $H \subset \mathbb{R}^\infty$. Nun gilt folgendes Theorem (s. [2]):

Theorem. *Sei* μ *das Standardgaußmaß und* T *eine nichtlineare Transformation von* H. *Weiter gelte:*

a) T *sei invertierbar mit der Umkehrabbildung* S, *sowohl* T *als* S *seien stetig differenzierbar im Hilbertraum und lokal beschränkt, und schließlich sei* $|\det dT(x)|$ *und* $|\det dS(x)|$ *stetig differenzierbar und lokal beschränkt. Mit* $T(x) = x + \lambda(x)$ *und* $S(x) = x + \lambda^*(x)$ *sei* $T_n(x) = x + P_n\lambda(x)$ *und* $S_n(x) = x + P_n\lambda^*(x)$, *wobei* P_n *die Projektion auf die ersten* n *Koordinaten ist) und es gelte* $\lim_{n\to\infty} |\det dT_n(x)| = |\det dT(x)|$ *und* $\lim_{n\to\infty} |\det dS_n(x)| = |\det dT(x)|$.

Dann gilt

b) $\sum_{k=1}^\infty (\lambda(x), e_k)(x, e_k)$, $\sum_{k=1}^\infty (\lambda^*(x), e_k)(x, e_k)$ *sind auf* $\mathbb{R}^\infty$ *fast überall konvergente Reihen.* ■

Fortsetzung des Beweises: T_φ hat folgende Gestalt:

$$T_\varphi \begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \\ g_3 \\ \vdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 + p_2(g_1) \\ g_3 + p_3(g_1, g_2) \\ \vdots \\ g_n + p_n(g_1, \dots, g_{n-1}) \\ \vdots \end{pmatrix}$$

Die p_n sind gewisse Polynome. Daraus ersehen wir sofort $\det dT_\varphi = 1$, denn dT_φ ist eine obere Dreiecksmatrix mit Einsen auf der Hauptdiagonale), und alle Forderungen aus a) sind erfüllt. Die Polynome $p_n(x)$ haben die Gestalt

$$\sum_{k_1,\dots,k_{n-1},\ell_1,\dots,\ell_{f(n)}} a_1^{\ell_1} \cdots a_{f(n)}^{\ell_{f(n)}} g_1^{k_1} \dots g_{n-1}^{k_{n-1}} C_{k_1,\dots,k_{n-1},\ell_1,\dots,\ell_{f(n)}} \sqrt{\frac{\lambda_1^{k_1} \dots \lambda_{n-1}^{k_{n-1}}}{\lambda_n}}.$$

Die a_n sind hier die Koeffizienten von φ. Wir machen jetzt eine sehr grobe Abschätzung. Es seien:

(i) A_n der Koeffizienten $C_{k_1,\dots}$ ungleich Null,
(ii) B_n die obere Schranke ihrer Beträge,
(iii) $L_n = \max\{k_1 + 2k_2 + \dots + (n-1)k_{n-1}\}$,
(iv) $M_n = \max\{\ell_1 + 2\ell_2 + \dots + f(n)\ell_{f(n)}\}$.

Nun existiert für alle φ ein M mit $a_n < M^n$ und für alle Folgen g_n aus dem Unterraum vollen Maßes aller Folgen mit $\sum \frac{g_n^2}{n^2} < \infty$ (s. [7]) existiert ein C mit $g_n < Cn$. Damit erhalten wir

$$\begin{aligned} \sum_{n=2}^{\infty} (\lambda(x), e_k)(x, e_k) &= \sum_{n=2}^{\infty} p_n(g_1, \dots, g_{n-1}) g_n \\ &< \sum_{n=2}^{\infty} A_n B_n (Cf(n))^{M_n} M^{L_n} \sqrt{\frac{\lambda_{n-1}^{L_n}}{\lambda_n}}. \end{aligned}$$

Sicher existiert eine stark wachsende Folge λ_n, die die Konvergenz der Reihe für alle C, M garantiert. ∎

Bemerkung 14. Die Darstellungen wurden ganz analog zum Fall endlichdimensionaler nilpotenter Lie-Gruppen konstruiert. Diese erweisen sich stets als irreduzibel. Es erhebt sich die Frage, ob sich die Irreduzibilität auf unsere Gruppe G als Untergruppe des projektiven Limes gewisser endlichdimensionaler nilpotenter Liegruppen überträgt. Beispielsweise liefert unsere Konstruktion für die unendlichdimensionale Heisenberg-Gruppe irreduzible Darstellungen.

References

[1] Budzynski, R. J., S. Klimek and P. Sadowski, *The group of local biholomorphisms of* $\mathbb{C}^1$ *and conformal field theory in the operator formalism*, Comm. Math. Phys. **120** (1989), 481–499.

[2] Gichman, I. I., und A. W. Skorochod, Theorie zufälliger Prozesse, Moskau 1971 (russisch).

[3] Kirillov, A. A., "Elements of the theory of representations", Springer-Verlag, Berlin, 1976.

[4] —, „Einführung in die Darstellungstheorie und nichtkommutative Analysis", Itogi Nauki i Techniki, Sovremenije Problemi Matematiki, Fundamentalnije Naprawlenja, tom 22, Moskva 1988 (russisch).

[5] Köthe, G., „Topologische lineare Räume", Band 1, Springer-Verlag, Berlin, 1960.

[6] Schäfer, H., "Topological vector spaces", Springer-Verlag, Berlin, 1972.

[7] Schilow, G. E. und Fan Dyk Tin, „Integral, Maß und Ableitung auf linearen Räumen", Moskau, 1967 (russisch).

Fachbereich Mathematik
Universität Leipzig
Augustus-Platz
O-7010 Leipzig, Germany

Received July 31, 1991