

Kontrolltheorie auf Lie-Gruppen

Dirk Mittenhuber

Zusammenfassung

Bei der Untersuchung der von einem Lie-Keil $W \subset \mathbf{L}(G)$ erzeugten Unterhalbgruppe einer Lie-Gruppe G erweisen sich Methoden der Kontrolltheorie als äußerst hilfreich. Ein Hauptergebnis der Kontrolltheorie ist das *Pontrjaginsche Maximumprinzip*, das zuerst in [3] angegeben wurde und eine notwendige Bedingung für die Optimalität von Steuerungen angibt. Wir geben hier an, welche spezielle Form das Maximumprinzip im Falle einer Lie-Gruppe annimmt und erhalten so einen kontrolltheoretischen Beweis für die Surjektivität der Exponentialfunktion einer kompakten, zusammenhängenden Gruppe.

1. Kontrolltheoretische Grundlagen

Wir verwenden die folgenden Bezeichnungen:

- M differenzierbare Mannigfaltigkeit
- TM das Tangentialbündel, $\pi_M : TM \rightarrow M$ die kanonische Projektion dazu
- T^*M das Kotangentenbündel, $\tilde{\pi}_M : T^*M \rightarrow M$ die kanonische Projektion dazu
- $\Gamma(TM), \Gamma(T^*M), \dots$ für die glatten Schnitte des jeweiligen Bündels.

Definition 1.1. Ein Kontrollsystem $\Sigma = (M, f, U)$ ist ein Tripel bestehend aus einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit M , einer Familie von Vektorfeldern $\{f_u \in \Gamma(TM)\}_{u \in U}$ und einer Parametermenge U . Wir schreiben auch $f(x, u)$ statt $f_u(x)$. Eine Kurve $x : [0, T] \rightarrow M$ heißt Integralkurve zur Steuerung $u(t)$, wenn sie absolutstetig ist und wenn gilt

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t)) \text{ f.ü. in } (0, T)$$

Es sei $p \in M$ und $T > 0$, dann definieren wir die Mengen

$$\text{Reach}_\Sigma(p, T) = \{x(T) \in M \mid \exists u \in L^\infty((0, T), U) \text{ so daß } \dot{x} = f(x, u), x(0) = p\}.$$

und

$$\text{Reach}_\Sigma(p) = \bigcup_{t>0} \text{Reach}_\Sigma(p, T).$$

Wenn $M = G$ eine Lie-Gruppe ist, so definieren wir noch $\text{Reach}_\Sigma = \text{Reach}_\Sigma(\mathbf{1})$.

Es sei nun G eine Lie-Gruppe, $U \subset \mathbf{L}(G)$ und $\Sigma = (G, d\lambda_g(\mathbf{1})u, U)$ das linksinvariante Kontrollsystem, dann sind die folgenden Tatsachen bekannt

- Reach_Σ ist eine Halbgruppe.
- Sei $W = \mathbb{R}^+ \text{conv}(U)$, und $\Sigma_W = (G, d\lambda_g(\mathbf{1})u, W)$, so ist $\text{Reach}_\Sigma = \text{Reach}_{\Sigma_W}$.
- Sei W ein abgeschlossener, konvexer Kegel in $\mathbf{L}(G)$, B eine kompakte Kegelbasis und $\Omega = E(B)$ die Menge der Extrempunkte von B . Sei ferner $\Sigma_B = (G, d\lambda_g(\mathbf{1})u, B)$ und $\Sigma_\Omega = (G, d\lambda_g(\mathbf{1})u, \Omega)$, dann gelten die Inklusionen

$$\text{Reach}_{\Sigma_\Omega} \subset \langle \exp_G(W) \rangle \subset \text{Reach}_{\Sigma_B} \subset \overline{\langle \exp_G(W) \rangle}.$$

2. Die symplektische Struktur des Kotangentenbündels einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit

Es sei M eine differenzierbare Mannigfaltigkeit, dann ist T^*M in kanonischer Weise eine symplektische Mannigfaltigkeit, d.h. es gibt eine geschlossene, nichtausgeartete, schiefsymmetrische 2-Form Ω auf $T(T^*M)$. Diese wird folgendermaßen konstruiert:

1. Man konstruiert eine kanonische 1-Form $\alpha : T(T^*M) \rightarrow \mathbb{R}$: Wir haben die kanonische Projektion $\pi_{T^*M} : T(T^*M) \rightarrow T^*M$. Ferner liefert der Funktor T angewandt auf die kanonische Projektion $\tilde{\pi}_M : T^*M \rightarrow M$ eine Abbildung $T\tilde{\pi}_M : T(T^*M) \rightarrow TM$. Wir bekommen so eine Abbildung von $T(T^*M)$ in das gefaserte Produkt $T^*M \times_M TM$, denn für $\xi \in T(T^*M)$ ist $\tilde{\pi}_M(\pi_{T^*M}(\xi)) = \pi_M(T\tilde{\pi}_M(\xi))$. Damit setzen wir

$$\alpha(\xi) := \langle \pi_{T^*M}(\xi), T\tilde{\pi}_M(\xi) \rangle.$$

2. Wir setzen nun $\Omega := d\alpha$, dann ist Ω automatisch geschlossen und schiefsymmetrisch. Man kann zeigen, (z.B. durch Wahl eines lokalen Koordinatensystems) daß Ω auch nichtausgeartet ist.

Da die 2-Form Ω nichtausgeartet ist, liefert sie einen Isomorphismus

$$I : T^*(T^*M) \rightarrow T(T^*M) \text{ über } \langle \lambda, \xi \rangle = \Omega(\xi, I\lambda) \quad \forall \xi \in T(T^*M).$$

3. Das zu einem Kontrollsystem adjungierte System

Jedes Vektorfeld auf einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit M läßt sich in kanonischer Weise zu einem Vektorfeld auf dem Kotangentenbündel T^*M anheben. Dazu benutzt man die folgende Konstruktion:

1. Jedes Vektorfeld $X \in \Gamma(TM)$ liefert eine glatte Funktion $\text{Ham}(X) \in C^\infty(T^*M; \mathbb{R})$ durch

$$\text{Ham}(X) = (T^*M \ni \eta \mapsto \langle \eta, X(\tilde{\pi}_M(\eta)) \rangle).$$
2. Jede glatte Funktion $H \in C^\infty(T^*M; \mathbb{R})$ besitzt ein Differential dH , d.h. wir erhalten einen glatten Schnitt $dH \in \Gamma(T^*(T^*M))$.
3. Die kanonische symplektische Struktur des Kotangentenbündels T^*M einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit M liefert einen Isomorphismus $I : T^*(T^*M) \rightarrow T(T^*M)$. Aus jedem glatten Schnitt $dH \in \Gamma(T^*(T^*M))$ erhalten wir also einen glatten Schnitt $I dH \in \Gamma(T(T^*M))$, d.h. ein Vektorfeld auf T^*M .

Wenn wir also eine Familie $\{f_u\}_{u \in U}$ von Vektorfeldern haben, so erhalten wir eine neue Familie $\{I d\text{Ham}(f_u)\}_{u \in U}$ von Vektorfeldern auf dem Kotangentenbündel. Das zu dem Kontrollsystem $\Sigma = (M, f_u, U)$ adjungierte System ist dann

$$\Sigma^a = (T^*M, I d\text{Ham}(f_u), U).$$

4. Das Pontrjaginsche Maximumprinzip

Das Pontrjaginsche Maximumprinzip liefert eine notwendige Bedingung für die Extremalität von Trajektorien. Die geometrische Version, die man z.B. in [4] findet, lautet:

Theorem 4.1. *Es sei $\Sigma = (M, f, U)$ ein Kontrollsystem, $p \in M$, $q \in \partial\text{Reach}_\Sigma(p)$. Ferner seien $u : [0, T] \rightarrow U$ eine meßbare Steuerung und $x : [0, T] \rightarrow M$ die dazu gehörige Trajektorie mit $x(0) = p$ und $x(T) = q$. Dann gibt es eine nichttriviale Lösung $\eta \neq 0$ des adjungierten Systems mit folgenden Eigenschaften:*

$$H(\eta(t); u(t)) = \langle \eta(t), f(x(t), u(t)) \rangle = \min_{v \in U} H(\eta(t); v) \text{ f.ü. in } (0, T) \quad (1)$$

$$H(\eta(t); u(t)) = 0 \quad (2)$$

Falls man wie in [3] nur zeitoptimale Steuerungen sucht, so wendet man obiges Theorem auf das Kontrollsystem $(M \times \mathbb{R}, (f, 1), U)$ an und erhält

Corollary 4.2. *Sei $\Sigma = (M, f, U)$, $p \in M$, $q \in \partial\text{Reach}_\Sigma(p, T)$. Ferner seien $u(t)$ eine zulässige Steuerung und $x(t) : [0, T] \rightarrow M$ die dazu gehörende Trajektorie mit $x(0) = p$ und $x(T) = q$. Dann existiert eine nichttriviale Lösung $\eta(t) \neq 0$ des adjungierten Systems mit folgenden Eigenschaften:*

$$H(\eta(t); u(t)) = \min_{v \in U} H(\eta(t); v) \text{ f.ü. in } (0, T) \quad (3)$$

$$H(\eta(t); u(t)) = \text{const.} \quad (4)$$

Die Existenz zeitoptimaler Steuerungen ist z.B. gesichert, wenn $\Sigma = (G, d\lambda_g(\mathbf{1})u, U)$ ist mit einer kompakten, konvexen Menge U .

5. Die symplektische Struktur des Kotangentenbündels einer Lie-Gruppe

Das Kotangentenbündel T^*G einer Lie-Gruppe G kann trivialisiert und mit $\mathfrak{g}^* \times G$ identifiziert werden mit Hilfe der linksinvarianten 1-Formen. Der Isomorphismus lautet

$$\phi : \mathfrak{g}^* \times G \rightarrow T^*G, \quad \phi(\omega, g) = d\lambda_{g^{-1}}(g)^*\omega.$$

Nun ist das Kotangentenbündel einer beliebigen differenzierbaren Mannigfaltigkeit in kanonischer Weise eine symplektische Mannigfaltigkeit, d.h. es gibt eine nichtausgarettete, schiefsymmetrische 2-Form Ω auf $T(T^*M)$. Diese induziert einen Isomorphismus $I : T^*(T^*M) \rightarrow T(T^*M)$, mit dessen Hilfe man das zu einem Kontrollsystem adjungierte System auf dem Kotangentenbündel erhält.

Wir berechnen nun diese 2-Form für die obige Trivialisierung sowie den Isomorphismus I . Das Ergebnis ist:

Theorem 5.1. *Es sei G eine Lie-Gruppe und $\Sigma = (G, d\lambda_x(\mathbf{1})u, U)$ das linksinvariante Kontrollsystem, dann lautet das dazu adjungierte System in der Linkstrivialisierung:*

$$\dot{\gamma} = d\lambda_\gamma(\mathbf{1})u \quad (5)$$

$$\dot{\omega} = \text{ad}(u)^*\omega. \quad (6)$$

Insbesondere gilt, wenn γ die Trajektorie zur Steuerung u ist, für die Lösung des adjungierten Systems:

$$\omega(t) = \text{Ad}(\gamma(t))^*\omega(0). \quad (7)$$

Proof. Die zweite Behauptung verifiziert man einfach durch Differentiation. Dabei ist zu beachten, daß für die adjungierte Darstellung Ad der Gruppe gilt: $d\text{Ad}(\mathbf{1}) = \text{ad}$. Sei also $u : [0, T] \rightarrow \mathfrak{g}$ eine beschränkte, meßbare Steuerung, γ sei die dazugehörige

Trajektorie des linksinvarianten Kontrollsystems und $\omega(s)$ wie oben. Für fest gewähltes $s \in \mathbb{R}$ setzen wir zunächst $g := \gamma(s)$, dann folgt:

$$\begin{aligned}
\dot{\omega}(s) &= \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \omega(s+t) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} (\omega(0) \circ \text{Ad}(\gamma(t+s))) \\
&= \omega(0) \circ \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} (\text{Ad}(gg^{-1}\gamma(t+s))) \\
&= \omega(0) \circ \text{Ad}(g) \circ \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} (\text{Ad}(g^{-1}\gamma(t+s))) \\
&= \omega(s) \circ (d\text{Ad})(\mathbf{1}) \circ \underbrace{d\lambda_{g^{-1}}(g) d\lambda_g(\mathbf{1})u(s)}_{=\dot{\gamma}(s)} \\
&= \omega(s) \circ \text{ad}(u(s)) \\
&= \text{ad}(u(s))^* \omega(s).
\end{aligned}$$

Der Beweis der ersten Behauptung erfolgt in den folgenden Lemmata und Propositionen. ■

Jedes Vektorfeld \mathcal{X} auf einer Mannigfaltigkeit M induziert eine Funktion auf dem Kotangentenbündel T^*M durch $\eta \mapsto \langle \eta, \mathcal{X} \rangle$, diese heißt die *Hamiltonfunktion* und wird auch mit $\text{Ham}(\mathcal{X})$ bezeichnet. Im Falle der obigen Trivialisierung erhalten wir

Proposition 5.2. Die Hamiltonfunktion H_Y zu $Y \in \mathfrak{g}$ lautet auf $\mathfrak{g}^* \times G$

$$H_Y(\omega, g) = \langle \omega, Y \rangle \quad (8)$$

und ihr Differential ist

$$dH_Y(\omega, \nu, X, g) = \langle \nu, Y \rangle. \quad (9)$$

Proof. Die Trivialisierung ist gerade so gewählt, daß Gleichung (8) erfüllt ist:

$$H_Y(\omega, g) = \langle \phi(\omega, g), d\lambda_g(\mathbf{1})Y \rangle = \langle \omega, d\lambda_{g^{-1}}(g)d\lambda_g(\mathbf{1})Y \rangle = \langle \omega, Y \rangle.$$

Gleichung (9) folgt unmittelbar aus der Tatsache, daß H_Y linear in ω ist und nicht von g abhängt. ■

Lemma 5.3. Für $i = 1, 2$ seien $(\omega, \nu_i, X_i, g) \in \mathfrak{g}^* \times \mathfrak{g}^* \times \mathfrak{g} \times G \cong T(\mathfrak{g}^*) \times TG \cong T(\mathfrak{g}^* \times G)$. Ferner sei Ω die kanonische symplektische Form auf $T(\mathfrak{g}^* \times G)$ und $\langle \cdot, \cdot \rangle$ bezeichne die Dualität auf $\mathfrak{g}^* \times \mathfrak{g}$, dann gilt

$$\Omega((\omega, \nu_1, X_1, g), (\omega, \nu_2, X_2, g)) = \langle \nu_1, X_2 \rangle - \langle \nu_2, X_1 \rangle - \langle \omega, [X_1, X_2] \rangle. \quad (10)$$

Proof. Der Wert der kanonischen Einsform $\alpha : T(T^*G) \cong \mathfrak{g}^* \times \mathfrak{g}^* \times \mathfrak{g} \times G$ ist

$$\alpha(\omega, \nu, X, g) = \langle \omega, X \rangle.$$

Nun seien \mathcal{X}_i Vektorfelder auf $\mathfrak{g}^* \times G$ mit $\mathcal{X}_i(\omega, g) = (\omega, \nu_i, X_i, g)$, dann gilt nach [1] für die äußere Ableitung $d\alpha = \Omega$

$$d\alpha(\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2) = L_{\mathcal{X}_1}\alpha(\mathcal{X}_2) - L_{\mathcal{X}_2}\alpha(\mathcal{X}_1) - \alpha([\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2]). \quad (11)$$

Dabei ist $L_{\mathcal{X}}$ die Lie-Ableitung und $\alpha(\mathcal{X}_i) =: f_i : \mathfrak{g}^* \times G \rightarrow \mathbb{R}$, $f_i(\omega, g) = \langle \omega, X_i \rangle$. Demnach ist also $L_{\mathcal{X}_i}f_j = \langle \nu_i, X_j \rangle$. Wenn wir die Lie-Algebren-Struktur über den Kommutator der entsprechenden Flüsse definieren, so erhalten wir die Behauptung. ■

Lemma 5.4. Für das linksinvariante Kontrollsystem gilt in der Linkstrivialisierung von $T(T^*G)$

$$I(dH_Y)_{(\omega, g)} = (\omega, \text{ad}(Y)^*\omega, Y, g), \quad (12)$$

Proof. Sei $I(dH_Y) = (\omega, \nu^*, X^*, g)$, es muß $dH_Y(\omega, \nu, X, g) = \Omega((\omega, \nu, X, g), I(dH_Y))$ sein, d.h.

$$\langle \nu, Y \rangle = \langle \nu, X^* \rangle - \langle \nu^*, X \rangle - \langle \omega, [X, X^*] \rangle \quad (\forall (\nu, X) \in \mathfrak{g}^* \times \mathfrak{g}).$$

Da die Gleichheit für alle (ω, ν, X, g) gilt, folgt sofort ($X = 0$ gesetzt): $X^* = Y$. Weiterhin folgt

$$\langle \nu^*, X \rangle = \langle \omega, [X^*, X] \rangle = \langle \omega, [Y, X] \rangle = \langle \omega, \text{ad}(Y)X \rangle,$$

d.h. $\nu^* = \omega \circ \text{ad}(Y) = \text{ad}(Y)^*\omega$. ■

6. Eine Anwendung

Eine Anwendung ist der folgende, kontrolltheoretische Beweis für die Surjektivität der Exponentialfunktion im Falle einer kompakten, zusammenhängenden Lie-Gruppe.

Lemma 6.1. Es sei V ein Vektorraum, $B : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ eine symmetrische, positiv definite Bilinearform und $\omega \in V^*$, dem Dualraum von V . Gesucht sind die Extremalstellen von

$$f(X) = \langle \omega, X \rangle \quad \text{unter der Nebenbedingung } B(X, X) = 1.$$

Dann gilt

$$X_{\max} = \frac{1}{\sqrt{B(X_\omega, X_\omega)}} X_\omega, \quad X_{\min} = -X_{\max} = -B(X_\omega, X_\omega)^{-\frac{1}{2}} X_\omega, \quad (13)$$

wobei X_ω dasjenige Element von V bezeichnet, für das

$$B(X_\omega, Y) = \langle \omega, Y \rangle \quad (\forall Y \in V)$$

ist.

Proof. Wir verwenden die Lagrangesche Multiplikatorenregel, d.h. wir suchen Sattelpunkte der Lagrangefunktion $L : V \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$L(X, \mu) = \langle \omega, X \rangle + \mu(B(X, X) - 1) = B(X_\omega, X) + \mu(B(X, X) - 1).$$

Dazu muß die Ableitung von L verschwinden, d.h. die partiellen Ableitungen $D_X L$ und $D_\mu L$ müssen verschwinden. Nun ist

$$(D_X L)_{(X, \mu)} : V \rightarrow \mathbb{R} = (Y \mapsto B(X_\omega, Y) + 2\mu B(X, Y) = B(X_\omega + 2\mu X, Y)),$$

und da B nicht ausgeartet ist, besagt die Forderung $D_X L = 0$ einfach

$$X_\omega + 2\mu X = 0 \Leftrightarrow X = -\frac{1}{2\mu} X_\omega. \quad (14)$$

Die Bedingung $D_\mu L = 0$ ist gerade $B(X, X) = 1$, d.h. mit X aus (14) folgt

$$1 = B\left(-\frac{1}{2\mu} X_\omega, -\frac{1}{2\mu} X_\omega\right) = \frac{1}{4\mu^2} B(X_\omega, X_\omega).$$

Also ist

$$\mu^2 = \frac{B(X_\omega, X_\omega)}{4} \implies \mu = \pm \frac{1}{2} \sqrt{B(X_\omega, X_\omega)}.$$

Da B positiv definit ist, so ergibt sich für $\mu = +\sqrt{\quad}$ die Maximalstelle und für $\mu = -\sqrt{\quad}$ die Minimalstelle. ■

Theorem 6.2. *Es sei G eine Lie-Gruppe und $B : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \rightarrow \mathbb{R}$ eine positiv definite, $\text{Ad}(G)$ -invariante Bilinearform, dann ist die Exponentialfunktion $\exp_G : \mathfrak{g} \rightarrow G_0$ surjektiv.*

Proof. Wir setzen $U := \{X \in \mathfrak{g} \mid B(X, X) \leq 1\}$ und betrachten nun das Kontrollsystem $\Sigma = (G, d\lambda_x(\mathbf{1})u, U)$. Da $G = \langle \exp_G(U) \rangle$, wissen wir, daß $\text{Reach}_\Sigma = G$ ist. Ferner wissen wir, daß wir jeden erreichbaren Punkt auch durch eine zeitoptimale Trajektorie erreichen können. Diese muß das Pontrjaginsche Maximumprinzip erfüllen. Wir zeigen nun, daß die einzigen Trajektorien, die das Maximumprinzip erfüllen, die Einparametergruppen von G sind, dann folgt die Behauptung.

Wir betrachten also die Hamiltonfunktion $\text{Ham}(\eta; u) : T^*G \times \mathfrak{g} \rightarrow \mathbb{R}$. Diese ist nach Proposition 5.2 gegeben durch

$$\text{Ham}(\eta; u) = H_u(\omega, g) = \langle \omega, u \rangle.$$

Wir haben also die Linearform ($u \mapsto \langle \omega, u \rangle$) bezüglich $u \in U$ zu minimieren. Nach Lemma 6.1 ist das minimierende u gegeben durch

$$u_{\min} = -\frac{1}{\sqrt{B(X_\omega, X_\omega)}}X_\omega \text{ und } H(\omega; u_{\min}) = -\sqrt{B(X_\omega, X_\omega)}.$$

Der Wert der Hamiltonfunktion ist aber nach Korollar 4.2 eine Konstante, d.h.

$$\sqrt{B(X_\omega, X_\omega)} = \text{const} = \sqrt{B(X_\omega(0), X_\omega(0))} =: r_0.$$

Ferner gilt für die Linearform $\omega(t)$:

$$\dot{\omega}(t) = \text{ad}(u_{\min}(t))^*\omega(t) = -\frac{1}{r_0}\text{ad}(X_{\omega(t)})^*\omega(t).$$

Nun gilt für beliebiges $Y \in \mathfrak{g}$ (wegen der $\text{Ad}(G)$ -Invarianz von B)

$$\langle \text{ad}(X_\omega)^*\omega, Y \rangle = \langle \omega, [X_\omega, Y] \rangle = B(X_\omega, [X_\omega, Y]) = B([X_\omega, X_\omega], Y) = 0.$$

Das bedeutet aber $\dot{\omega}(t) = 0$. Also sind ω, X_ω konstant und damit auch die optimale Steuerung $u(t)$. Folglich sind die einzigen Trajektorien, die das Maximumprinzip erfüllen, die Einparameteruntergruppen von G . ■

Corollary 6.3. *Ist G eine kompakte, zusammenhängende Lie-Gruppe, so ist die Exponentialfunktion $\exp_G : \mathbf{L}(G) \rightarrow G$ surjektiv.*

Proof. Da die Gruppe kompakt ist, gibt es eine $\text{Ad}(G)$ -invariante, positiv definite Bilinearform auf $\mathbf{L}(G)$ (Weylscher Trick). Also ist Satz 5.1 anwendbar. ■

References

- [1] Bourbaki, N., "Variétés différentielles et analytiques," Paragraphes 8 à 15, *Éléments de Mathématique*, Hermann, Paris, 1971.
- [2] Dieudonné, J., "Grundzüge der modernen Analysis," Band 3, Vieweg, Braunschweig, 1976.
- [3] Pontrjagin, L. S., "Mathematische Theorie optimaler Prozesse," R. Oldenbourg, München, 1967.
- [4] Sussmann, H. J., *Lie Brackets, Real Analyticity and Geometric Control*, in R. W. Brockett, R. S. Milman und H. J. Sussmann, Hrsg., "Differential Geometric Control Theory," S.1–116, Birkhäuser, Boston, 1983.

Fachbereich Mathematik
Technische Hochschule
Schloßgartenstr. 7
D-6100 Darmstadt, Germany

Received July 31, 1991
and in final form September 25, 1991