Seminar Sophus Lie
1 (1991) 101–106

Partitionen einfach zusammenhängender auflösbarer Liegruppen

Peter Plaumann und Karl Strambach

Eine Partition einer (topologischen) Gruppe G ist eine Familie (abgeschlossener) Untergruppen, welche G bedeckt und deren Elemente paarweise trivialen Schnitt haben. In [5] haben wir alle Partitionen zusammenhängender Liegruppen beschrieben; es stellt sich heraus, daß jede Partition einer zusammenhängenden Liegruppe aus zusammenhängenden Untergruppen besteht. Enthält die Liegruppe G kompakte Elemente $\neq 1$, so besitzt G genau dann eine nichttriviale Partition, wenn G eine Frobeniusgruppe oder zu einer der einfachen Gruppen $\mathrm{SO}_3(\mathbb{R}), \mathrm{PSL}_2(\mathbb{R}), \mathrm{PSL}_2(\mathbb{C})$ isomorph ist (vgl. [5], Satz I.6.3, Satz I.5.2). Wegen der Definition von Frobeniusgruppen in der Klasse der Liegruppen vergleiche man [4] (s. auch [5], I. §4). Da die einfach zusammenhängende Überlagerung $\widetilde{\mathrm{PSL}_2}(\mathbb{R})$ der Gruppe $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ nicht als Faktor einer Gruppe mit Partition auftreten kann (vgl. [5], Satz I.6.3, I. S 4), kommen als partierbare kompaktfreie Liesche Gruppen nur einfach zusammenhängende auflösbare Gruppen in Frage. Da jede Liealgebra die Partition in ihre eindimensionalen Unteralgebren besitzt, läßt eine exponentielle Liegruppe G die Partition in Einparametergruppen zu, wofern $\dim G > 1$ ist. Ist G eine einfach zusammenhängende auflösbare Liegruppe, welche nicht exponentiell ist, so haben wir in ([5], Satz I.2.9) gezeigt, daß die feinste Partition von G aus einem Normalteiler B der Dimension > 1 und Einparametergruppen besteht — für nicht partierbare Gruppen ist natürlich $B = G$. Wir wollen in dieser Note zeigen, daß dieser Normalteiler B die Kodimension 1 in G hat und genau beschreiben, wie B zu den Störungen der Exponentialabbildung in G liegt. Mit letzterem wird die ungenaue Formulierung in Korollar I.2.10 aus [5] präzisiert. Unsere Methode besteht in der Beschreibung der Exponentialabbildung einre reellen einfach zusammenhängenden Liegruppe, wie sie von Dixmier [2] gegeben wurde. Diese Ergbebnisse hatten wir bereits in [5] verwendet, hier werfen wir aber einen genaueren Blick auf die in [2] beschriebene analytische Natur der Exponentialabbildung auf auflösbaren Liealgebren und benutzen die Rolle der „Ausnahmevarietäten" voll aus.

Zu jeder Partition $\mathfrak{P}$ einer Gruppe G gehört eine Geometrie, eine Translationsstruktur $\Sigma_{\mathfrak{P}}$; Punkte von $\Sigma_{\mathfrak{P}}$ sind die Elemente von G, Geraden die Nebenklassen $\{Px \mid x \in G, \ P \in \mathfrak{P}\}$ und zwei Geraden P_1x_1 und P_2x_2 heißen parallel, wenn $P_1 = P_2$ ist. Die rechtsreguläre Darstellung von G bildet jede Gerade auf eine zu ihr parallele ab und wird die Translationsgruppen von $\Sigma_{\mathfrak{P}}$ genannt (s. [1, 2]). In einer Geometrie, die auf diese Weise aus einer Liegruppe entsteht, ist es eine natürliche Forderung, daß alle Geraden die gleiche Dimension d haben; eine solche Translationsstruktur möge homogen die Dimension d

heißen. Aus dem Satz der vorliegenden Note folgt, daß eine Liesche Translationsstruktur mit einer auflösbaren einfach zusammenhängenden Translationsgruppe G (vgl. [5], II. §2) höchstens dann homogen von Dimension > 1 sein kann, wenn G exponentiell ist (Korollar 4).

Wir danken den Teilnehmern des Seminars „Sophus Lie", insbesondere Herrn K.H. Hofmann, für die Diskussionen im Anschluß an unsere Vorträge; diese Gespräche haben die Entstehung dieser Note angeregt.

Satz 1. *Sei G eine einfach zusammenhängende auflösbare Liegruppe, die nicht exponentiell ist. Besitzt G eine triviale Partition, so ist diese eindeutig bestimmt; sie besteht aus genau einem Glied B der Kodimension 1 in G und lauter Einparametergruppen. Überdies gelten folgende Aussagen:*

(i) *B ist ein Normalteiler von G und es ist G semidirektes Produkt von B mit einer zu $\mathbb{R}$ isomorphen Untergruppe.*

(ii) *Der Zentralisator von B in G ist in B enthalten.*

Beweis. Sei $\mathfrak{P}$ eine nichttriviale Partition der einfach zusammenhängenden auflösbaren Liegruppe G, die nicht exponentiell ist, und sei $\mathfrak{P}_0$ die feinste Partition von G. Nach Satz I.2.8 aus [5] bestehen $\mathfrak{P}$ wie $\mathfrak{P}_0$ aus zusammenhängenden Gruppen und $\mathfrak{P}_0$ besteht aus einem Glied B mit $\dim B > 1$, welches ein Normalteiler von G ist, sowie lauter Einparametergruppen ([5], Satz I.2.9).

Wir analysieren nun die Natur der Exponentialabbildung von der Liealgebra $\mathfrak{L}G$ nach G wie in [3]: Man betrachtet die Komplexifizierung $\widetilde{\mathfrak{L}G}$ und $\widetilde{G}$ von $\mathfrak{L}G$ bzw. G. Für eine Wurzelform $\widetilde{\varphi}$ von $\widetilde{\mathfrak{L}G}$ sei $\mathfrak{L}G_{\widetilde{\varphi}}$ der Kern von $\widetilde{\varphi}$ und für $0 \neq l \in \mathbb{Z}$ sei $\widetilde{\mathfrak{L}G}_{\widetilde{\varphi},l}$ durch die Gleichung $\widetilde{\varphi}(x) = 2\pi i l$ gegeben. Dann enthält das Ideal $(\widetilde{\mathfrak{L}G})_{\widetilde{\varphi}}$ das Nilradikal von $\widetilde{\mathfrak{L}}G$. Die Vereinigung $\widetilde{\mathfrak{S}}$ der Nebenklassen $\widetilde{\mathfrak{L}G}_{\widetilde{\varphi},l}$ für alle Wurzelformen φ und alle $0 \neq l \in \mathbb{Z}$ wird die lineare Ausnahmevarietät von $\widetilde{\mathfrak{L}}G$ genannt ([3], p. 113). In der einfach zusammenhängenden komplexen Liegruppe $\widetilde{G}$ sei $\widetilde{N}$ das Nilradikal. Seien $\widetilde{\Omega} : \widetilde{\mathfrak{L}G} \to \widetilde{G}$ und $\widetilde{\omega} : \widetilde{\mathfrak{L}G}/\mathfrak{L}\widetilde{N} \to \widetilde{G}/\widetilde{N}$ die jeweiligen Exponentialabbildungen und seien $\widetilde{\pi} : \widetilde{G} \to \widetilde{G}/\widetilde{N}$ bzw. $D\widetilde{\pi} : \widetilde{\mathfrak{L}G} \to \widetilde{\mathfrak{L}G}/\mathfrak{L}\widetilde{N}$ die Restklassenprojektionen. Dann ist

$$\begin{tikzcd}
\widetilde{\mathfrak{L}G} \arrow[r, "\widetilde{\Omega}"] \arrow[d, "D\widetilde{\pi}"'] & \widetilde{G} \arrow[d, "\widetilde{\pi}"] \\
\widetilde{\mathfrak{L}G}/\mathfrak{L}\widetilde{N} \arrow[r, "\widetilde{\omega}"'] & \widetilde{G}/\widetilde{N}
\end{tikzcd}$$

ein kommutatives Diagramm. Man definiert die Ausnahmevarietät von $\widetilde{G}$ durch $\widetilde{S} = \widetilde{\pi}^{\leftarrow}\widetilde{\omega}(D\widetilde{\pi})(\widetilde{\mathfrak{S}})$ ([3], p. 114). Die Ausnahmevarietät der reellen Liegruppe G ist dann die Menge $S = \widetilde{S} \cap G$. Man erhält S auch, wenn man zunächst $\mathfrak{S} = \widetilde{\mathfrak{S}} \cap \mathfrak{L}G$ bildet, als $S = \pi^{\leftarrow}\omega(D\pi)(\mathfrak{S})$, wobei $\pi, \omega, D\pi$ die entsprechenden Einschränkungen auf das Reelle sind ([3], p. 118).

Nach [3], Théorème 2.2° ist die Einschränkung der Exponentialabbildung $\exp_G$ auf $(\mathfrak{L}G) \setminus \mathfrak{S}$ regulär. Sei $s \in \mathfrak{S}$. Es folgt aus [3], Théorème 2.3°, daß es ein Element $s \neq t \in \mathfrak{L}G$ gibt, für welches $\exp_G t = \exp_G s$ ist. Da G

einfach zusammenhängend ist, ist aber die Einschränkung von $\exp_G$ auf den 1-dimensionalen Teilraum $\mathbb{R}s$ injektiv. Das Element $g = \exp_G s$ liegt also auf zwei verschiedenen Einparametergruppen, nämlich $\exp_G(\mathbb{R}s)$ und $\exp_G(\mathbb{R}t)$. Nennen wir solche Elemente *Knoten* von G, so ist also $S_1 = \exp_G \mathfrak{S}$ die Menge der Knoten von G. Entsprechend ist $R = \exp_G(\mathfrak{L}G \setminus \mathfrak{S})$ die Menge der Elemente von G, die auf genau einer Einparametergruppe liegen. Schießlich sei $S_2 = G \setminus \exp_G(\mathfrak{L}G)$; dann ist $S = S_1 \cup S_2$, denn nach [3], Théorème 2 ist S das Komplement von R in G.

Wie oben erwähnt, liegen in der feinsten Partition $\mathfrak{P}$ von G alle Elemente außerhalb des eindeutig bestimmten Gliedes B von $\mathfrak{P}_0$ mit $\dim B > 1$ auf einer Einparametergruppe $F \in \mathfrak{P}_0$. Also enthält B die Menge S_2 und nicht nur die Menge S_1, sondern auch diejenigen Einparametergruppen in G, die durch ein Element von S_1 gehen. Bezeichnet Σ die Menge dieser Einparametergruppen, so liegen S und Σ in B.

Ist $\dim G = n$, so ist $\dim S \leq n-2$ nach [3], p. 119. Ist F eine Einparametergruppe aus Σ, so ist $F \cap S = F \cap S_1$ diskret. Für die von $F \cup S$ erzeugte Untergruppe H gilt also $\dim H > \dim S \geq n-2$. Wegen $H \subseteq B$ ist also $\dim B \geq n-1$. Da $\mathfrak{P}_0$ nicht trivial sein sollte, folgt hieraus $\dim B = n-1$.

Es ist nun klar, daß $\mathfrak{P} = \mathfrak{P}_0$ ist und daß (i) gilt. Die Behauptung (ii) schließlich ist in [5], Satz I.2.9 enthalten. ■

Der in Satz 1 angesprochene Normalteiler $B = B(G)$ enthält neben der Ausnahmevarietät S von G die Menge Σ der Einparameteruntergruppen, auf welchen ein Knoten, d.h. ein Element von S_1 liegt. Sei φ_2 die Menge der Wurzelformen zu 2-dimensionalen Hauptfaktoren von G. Ist $0 \neq l \in \mathbb{Z}$ und $\varphi \in \Phi_2$, so ist $G_{\varphi,l} \neq \emptyset$ (vgl. [3], p. 119, No. $1^\circ, 2^\circ, 3^\circ$) denn es haben $\mathfrak{L}G_{\varphi,l}$ und $G_{\varphi,l}$ die gleiche Dimension. Also ist $G_{\varphi,l}$ eine Nebenklasse $G_\varphi \cdot c$ mit $c \in S_1$. Wegen $S_1 \subseteq \bigcup \Sigma$, wird also $B(G)$ von der Familie $\{G_\varphi | \varphi \in \varphi_2\} \cup \Sigma$ erzeugt. Nach [3, p. 119, l.c] ist $\dim G_\varphi \geq n-2$ für $\varphi \in \Phi_2$, und wegen $\bigcup \Sigma \not\subseteq \bigcup \{G_\varphi | \varphi \in \Phi_2\}$ ist $\dim B(G) \geq \max\{\dim G_\varphi | \varphi \in \varphi_2\}$. Somit existiert auf G eine nichttriviale Partition höchstens dann, wenn alle Varietäten $G_{\varphi,l}$ eine Dimension $n-2$ haben oder trivial sind. Wir nennen in einer beliebige einfach zusammenhängende auflösbare Liegruppe die Untergruppe $B(G)$, die von der Familie $\{G_{\varphi,l} | 0 \neq l \in \mathbb{Z}, \varphi \to$ Wurzelform von $G\}$ die *Ausnahmeuntergruppe* von G. Wie wir gerade gesehen haben, gilt

Lemma 1. *Die Ausnahmeuntergruppe einer einfach zusammenhängenden auflösbaren Liegruppe wird von den Zentralisatoren zweidimensionaler Hauptfaktoren und denjenigen Einparameteruntergruppen erzeugt, die einen Knoten enthalten.* ■

Korollar 1. *Genau dann besitzt eine einfach zusammenhängende auflösbare Liegruppe G, die nicht exponentiell ist, eine nichttriviale Partition, wenn G folgende Struktur hat:*

a) *G ist semidirektes Produkt eines nichtexponentiellen Normalteilers B von Kodimension 1, welcher unteilbar ist, mit einer Untergruppe $E \cong \mathbb{R}$.*

b) *E operiert so auf B, daß es auf den zweidimensionalen Hauptfaktoren nicht-triviale Skalarmultiplikationen induziert. In diesem Fall besteht die* *einzige nichttriviale Partition von G aus B und den Einparameteruntergruppen von G außerhalb von B.*

Beweis. Wenn G eine nichttriviale Partition besitzt, so folgt a) aus Satz 1. Sei nun U/V ein 2-dimensionaler Hauptfaktor von G. Dann ist zunächst $U \subseteq B$. Wegen $\dim U/V = 2$ gibt es in N eine Einparametergruppe S, welche auf U/V die Gruppe SO_2 induziert. Da G und damit $H = \overline{gp}\{E, S\}$ auflösbar ist, induziert H eine auflösbare Untergruppe von $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ auf U/V, welche SO_2 enthält. Für die Wirkung von E auf U/V gibt es dann nur zwei Möglichkeiten:

(j) E zentralisiert U/V.

(ij) E induziert die volle Gruppe der Skalarmatrizen auf U/V.

Wir schließen nun (j) aus. Sei dazu φ die reelle Wurzelform der Liealgebra $\mathfrak{L}(G)$, die zu dem Hauptfaktor $\mathfrak{L}V/\mathfrak{L}U$ gehört. Dann liegt $\mathfrak{L}E$ im Kern von φ. Die Untergruppe E von G ist also im Erzeugnis der Ausnahmevarietät S von G und damit nach dem Zusatz zu Satz 1 in B enthalten. Also war G doch nicht partierbar.

Seien umgekehrt (a) und (b) für G erfüllt. Wir beweisen durch Induktion über die Kompositionslänge $l(G)$, daß jedes Element von $x \in G\backslash B$ auf einer eindeutig bestimmten Einparametergruppe P_x liegt und daß $P_x \cap B = 1$ gilt. Induktionsanfang ist $l(G) = 3$, denn für kleinere Längen sind (a) und (b) nicht erfüllbar. Für $l(G) = 3$ ist dann G notwendig die Gruppe

$$\{(z, r, t) \mid z \in \mathbb{C},\ \ r \in \mathbb{R}_+,\ \ t \in \mathbb{R}\}$$

mit der Multiplikation

$$(z_1, r_1, t_1) \cdot (z_2, r_2, t_2) = (z_1 + r_1 e^{it_1} z_2, r_1 r_2, t_1 + t_2)\ ,$$

und der Normalteiler B ist die Menge

$$\{(z, 1, t) \mid z \in \mathbb{C},\ \ t \in \mathbb{R}\}\ .$$

Jedes Element $g \in G\backslash B$ ist von Form $g = (z, a, t)$ mit $a \neq 1$. Dann ist aber $\sqrt{a}\, e^{it/2} \neq -1$. Also ist $\big((1 + \sqrt{a}\, e^{it/2})^{-1} z,\ \ \sqrt{a}, \frac{1}{2}t\big)$ die eindeutig bestimmte Quadratwurzel von g in G. Die Komplettierung der dyadischen Darstellung ergibt die Existenz der eindeutig bestimmten Einparametergruppe durch g.

Sei nun $l(G) = r$ und sei die Behauptung für Gruppen kleiner Kompositionslänge bereits bewiesen. Sei M ein minimaler Normalteiler von G und sei $x \in G\backslash B$. Wäre $M \not\subseteq B$, so wäre $G = M \times B$, was b) widerspricht. Ist G/M exponentiell, so liegt die Nebenklasse $xM \in G/M$ in einer eindeutig bestimmten Einparameteruntergruppe F/M mit $F \cap B = M$. Ist dagegen G/M nicht exponentiell, so folgt die gleiche Aussage auf der Induktionsannahme. Nun ist M eine Vektorgruppe der Dimension ≤ 2 und es ist $F/M \cong \mathbb{R}$. Wegen b) ist F exponentiell. Das Element $x \in F$ liegt also auf einer eindeutig bestimmten Einparametergruppe $P \subseteq F$, für die natürlich $P \cap M = 1$ gilt. Wegen $F \cap B = M$ folgt $P \cap B = 1$.

Angenommen, ein Element $x \in G\backslash B$ läge auf zwei verschiedenen Einparametergruppen P_1 und P_2. Nach [3, Théorème 2] gäbe es dann aber beliebig nahe bei x Elemente, die auf keiner Einparametergruppe liegen, was der Offenheit von $G\backslash B$ in G widerspräche. Damit ist die Induktionsbehauptung gezeigt, und G ist partierbar. ∎

Aus dem obigen Korollar kann man ein Ergebnis herleiten, welches von Standpunkt des Geometers eher kurios ist:

Korollar 2. *Besitzt eine einfach zusammenhängende auflösbare Liegruppe überhaupt eine nicht-triviale Partition, so auch eine Partition in einer Untergruppe von Kodimension 1 und lauter Einparametergruppen.*

Beweis. Ist G exponentiell, so betrachte man eine entsprechende Partition der Liealgebra $\mathfrak{L}G$ und bilde sie mit der Exponentialabbildung nach G ab. Im anderen Fall ist die Behauptung in Korollar 1 enthalten. ∎

Geometrisch von Interesse sind im Gegensatz zu dem Sachverhalt in Korollar 2 Partitionen, in denen alle Glieder die gleiche Dimension d haben. Wir nennen solche Partitionen *homogen.* Es gilt

Korollar 3. *Eine einfach zusammenhängende auflösbare Liegruppe besitzt genau dann eine nichttriviale homogene Partition, wenn sie exponentiell ist.*

Beweis. Für eine exponentielle Gruppe betrachte man die Partition in Einparametergruppen. Ist G nicht exponentiell, so besitzt G nach Korollar 1 keine homogene Partition. ∎

Korollar 4. Sei G eine zusammenhängende Liegruppe, die nicht exponentiell ist. Genau dann gestattet G eine Partition in Untergruppen einer festen Dimension > 1, wenn G eine Frobeniusgruppe ist, deren Frobeniuskomplemente entweder zu $\mathbb{R} \times \mathrm{SO}_2(\mathbb{R})$ oder zu $\mathbb{R} \times \mathrm{SU}_2(\mathbb{C})$ isomorph sind.

Beweis. Ist G kompaktfrei und besitzt eine nichttriviale Partition, so haben wir schon in der Einleitung bemerkt, daß G auflösbar sein muß. Wegen Korollar 3 scheidet dann diese Möglichkeit aus. Also enthält nichttriviale kompakte Untergruppen, und die Behauptung folgt dann aus [5], Korollar II.2.11. ∎

Aus dem Beweis zu Satz 1 kann man schließlich noch eine Charakterisierung der Liealgebra der Ausnahmeuntergruppe $B(G)$ in der Liealgebra $\mathfrak{L}G$ ablesen. Es ist $B(G)$ die kleinste zusammenhängende Untergruppe von G, welche die Ausnahmevarietät S von G enthält. Sei Φ_2 die Menge der Wurzelformen zu 2-dimensionalen Kompositionsfaktoren der reellen Liealgebra $\mathfrak{L}G$ von G und Σ die Menge derjenigen Einparameteruntergruppen von G, welches einen Punkt des Exponentialbild der linearen Ausnahmevarietät $\mathfrak{S}$ von $\mathfrak{L}G$ enthalten.

Die Menge $X = \{G_\varphi \mid \varphi \in \Phi_2\} \cup \bigcup \Sigma$ erzeugt einen Normalteiler A von G, welcher in $B(G)$ liegt; wegen [3, Théorème 2] ist $\dim G/A \leq 1$, wie wir schon im Beweis von Satz 1 gesehen haben. Ist $B(G) \neq G$, so folgt sofort $A = B(G)$. Ist aber $B(G) = G$, so ist G unpartierbar. Wäre $A \neq G$, so folgte aus Korollar 1, daß G semidirektes Produkt von A mit einer Einparametergruppe E ist, welche einen 2-dimensionalen Hauptfaktor V in A zentralisiert. Für die zugehörige Wurzelform φ wäre dann aber $E \subseteq G_\varphi$, woraus $E \subseteq A$ folgte. Somit wird G von X erzeugt. Für die Liealgebra $\mathfrak{L}G$ ergibt dies das folgende Korollar, das in trivialer Weise auch für exponentielle Liegruppen erfüllt ist.

Korollar 4. *Sei $\mathfrak{L}$ eine auflösbare reelle Liealgebra, und sei Φ_2 die Menge der Wurzelformen zu den 2-dimensionalen Kompositonsfaktoren von $\mathfrak{L}$. Dann ist die Liealgebra, die von der Familie $\{\ker\varphi \mid \varphi \in \Phi_2\}$ zusammen mit der linearen Ausnahmevarietät $\mathfrak{S}$ erzeugt wird, die Liealgebra der Ausnahmeuntergruppe der zugehörigen einfach zusammenenhängenden Gruppe G.* ■

References

[1] André, J., *Über Parallelstrukturen, I. Grundbegriffe.*, Math. Z. **76** (1961), 85–102.

[2] —, *Über Parallelstrukturen, II. Translationsstrukturen*, Math. Z. **76** (1961), 155–163.

[3] Dixmier, J., *L'application exponentielle dans les groupes de Lie résolubles*, Bull. Soc. Math. France **85** (1957), 313–321,.

[4] Muchin, Ju. N., *On topological Frobenius groups* (Russian), in: Investigations in group theory, Collect. Artic. Sverdlowsk: Uralskij Nauchnyj Tsentr AN SSSR 1984, 120–130.

[5] Plaumann, P. und K. Strambach, *Partitionen Liescher und algebraischer Gruppen*, Forum Math. **2** (1990), 523–578.

Mathematisches Institut
der Universität
Bismarckstr. 1 1/2
D-8520 Erlangen

Received 26. März 1991