Seminar Sophus Lie
2 (1992) 279–293

Karl Heinrich Hofmann und die Geometrie

Karl Strambach*

Zum ersten Mal bin ich Herrn Karl Heinrich Hofmann im Sommersemester 1965, in meinem siebten Studiensemester, begegnet. Professor Baer, bei dem Herr Plaumann und ich kleine Hilfsbremser waren, bat ihn, da Herr Hofmann aus Amerika wohl für die Sommermonate nach Tübingen gekommen war, zu einem Kolloquiumsvortrag nach Frankfurt zu kommen. Der Nebenzweck dieses Kolloquiums war es, Peter Plaumann die Möglichkeit zu einem Gespräch über seine Ergebnisse mit dem Fachmann topologischer Gruppen zu geben, der, wie Herr Baer wohl gemeint haben würde, die topologischen Gruppen angemessen, das heißt als Gruppentheoretiker traktierte (vgl.[14]). Peter Plaumann war abkommandiert, Herrn Hofmann abzuholen und ihn zu betreuen, was nach Meinung von Herrn Baer bis auf die Tatsache vorzüglich gelang, daß Peter Herrn Hofmann, der nach Überzeugung von Herrn Baer ein erstklassiger Feinschmecker war, in die Gaststätte „Schlagbaum" zum Essen mitnahm, die sogar unter Studenten für ihre fetten Schnitzel und die etwas unappetitliche Sülze berühmt war. Das Kolloquiumsthema von Herrn Hofmann blieb mir nicht ganz präzise im Gedächtnis. Ich erinnere mich nur, daß es um das Zerfallen in topologischen Gruppen ging, was mir heute auch dadurch plausibel erscheint, weil 1963 das berühmte Memoir 43 von Hofmann und Mostert: "Splitting in topological groups" erschien [19], in dem das folgende mich auch heute beeindruckende Theorem steht: *Enthält eine lokal kompakte Gruppe G eine Vektorgruppe $V \cong \mathbb{R}^n$ als Untergruppe und ist der Faktorraum G/V kompakt, so hat G auch einen zu $\mathbb{R}^n$ isomorphen Normalteiler N und eine kompakte Untergruppe C, so daß $G = NC$ und $N \cap C = \{1\}$ gilt.* Peter Plaumann schwört jedoch Stein und Bein, daß Herr Hofmann im Frankfurter Kolloquium damals den folgenden Satz bewiesen hat, der zwei Jahre später in der Dissertation seines Schülers Dong Hoon Lee erschien: *Ist G eine kompakte Gruppe und G_0 ihre Zusammenhangskomponente, so gibt es eine total unzusammenhängende kompakte Untergruppe D in G, so daß $G = G_0 D$ gilt und $G_0 \cap D$ im Zentrum von G_0 liegt* (vgl. [29]).

Die Persönlichkeit von Herrn Hofmann hat mir in den zwei Tagen seines damaligen Frankfurter Aufenthalts eine gewaltige Portion Angst eingejagt. Ich habe mich damals, weil Herr Salzmann für ein Jahr an der University of Southern California war, etwas autodidaktisch mit der Ergänzungs– und Zerlegungsgleichheit von Polygonen in nichteuklidischen Geometrien beschäftigt [41] und, als non plus ultra, das Bachmannsche Buch: „Über den Aufbau der Geome-

---

* Vortrag gehalten am Festkolloquium der TH Darmstadt am 23. Oktober 1992 zum Anlaß des 60. Geburtstages von Karl Heinrich Hofmann am 3. Oktober 1992

trie aus dem Spiegelungsbegriff“ [2] gelesen. Bereits Peter Plaumann, mit dem ich im Sommer 1965 oberhalb der Buchhandlung Harri Deutsch ein Dienstzimmer teilte, nötigte mir durch seine Bemühungen um topologische FC–Gruppen, das sind lokal kompakte Gruppen, in denen die Konjugiertenklassen von Elementen relativ kompakt sind, Respekt und Bewunderung ab. Und nun kam Karl Heinrich Hofmann, legte einen glänzenden Vortrag hin und arbeitete mit Peter einen Vormittag lang. Ich war ganz still mit im Zimmer, innerlich geduckt, aber doch ganz Ohr. Die Diskussion drehte sich um den Sachverhalt, daß eine topologische lokal kompakte zusammenhängende FC–Gruppe kompakte topologische Kommutatorgruppen hat und daß die Kompaktheit der topologischen Kommutatorgruppe mit der Existenz einer zusammenhängenden abelschen Untergruppe mit kompaktem Restklassenraum zur Kompaktheit der Faktorgruppe nach dem Zentrum äquivalent ist. Beim Beweis dieser Sätze, die Peter Plaumann unabhängig von Moskowitz und Großer gefunden und 1967 publiziert hatte (vgl. [33]), die aber durch Moskowitz und Großer den ihnen gebührenden Platz in der harmonischen Analysis haben einnehmen können, benutzte Peter den eben von mit zitierten Satz von Hofmann–Mostert, so daß Herr Hofmann nach bereits etwa zehn Minuten des Zuhörens voll in sein Element kam. Die den ganzen Vormittag andauernde Diskussion zeigte mir schon damals mit einem Schlag all die Eigenschaften, die Herrn Hofmann zu einem Ausnahmevollblutmathematiker machen, zu einem geduldigen, aber verstehenwollenden Referenten sowie zu einem anspornenden und sich für seine Schüler aufreibenden Hochschullehrer. Ich habe damals auch voller Bewunderung festgestellt und im Laufe meiner späteren Zusammenarbeit immer wieder bestätigt bekommen, daß kein Hinweis, diese oder jene Autorität hätte dieses oder jenes bewiesen, in der Lage war, Herrn Hofmanns wissenschaftliches Gewissen zu beruhigen, wenn es seinem Verständnis der Sache zuwiderlief. Genauso wie Peter damals bin auch ich später oft bei ungelenken Erklärungsversuchen der wunden Stellen eines Beweises, die rücksichtsvoll, aber beharrlich von Herrn Hofmann offengelegt wurden, sowie bei dem Feuerwerk seiner mannigfachen Verbesserungsvorschläge tüchtig zum Schwitzen gebracht worden.

Wie ich damals in Frankfurt die beiden, Herrn Hofmann und Peter, die für mich hohe Schule der Forschung betreiben sah, kam ich mir mit meinen nichteuklidischen Polygonen wie ein Eingeborener vor, der einen Einbaum ausmeißelnd, auf der Werft unter die Konstrukteure von Hochseeschiffen geraten ist. Deprimiert stellte ich fest: Man kann es doch nicht einmal im Ansatz schaffen, so wie Herr Hofmann auf der mathematischen Klaviatur zu brillieren.

Daß es mir im Laufe der nächsten Jahre doch vergönnt war, einige Intentionen der schönen Hofmannschen Arbeiten, wie ich hoffe, zu begreifen, verdanke ich der unendlichen Geduld und dem pädagogischen Geschick von Rainer Salzmann, der mich nach seiner Rückkehr aus den Vereinigten Staaten unter die Fittiche der topologischen Geometrie mitnahm sowie den geistreichen Aperçus von Hans Freudenthal, in denen üblicherweise mathematische Größe aufs menschliche Maß reduziert wurde.

Seit 1965 habe ich Herrn Hofmann bei Kolloquiumsanlässen immer wieder getroffen, mit ihm jedesmal aus ehrfürchtiger Distanz eine mathematische Konversation zu führen gesucht, die wegen meiner sich wendenden und unsteten, aber zu ihm hintendierenden Interessen für mich immer fruchtbarer auszufallen pflegte; doch das Glück, in den achtziger Jahren eine wissenschaftliche Zusammenarbeit mit ihm starten zu dürfen, verdanke ich seiner Zuneigung zur traditionellen Geometrie, die ihn dazu bewogen hat, die von Peter Plaumann und mir im August 1980 in Bad Windsheim veranstaltete Nato–Sommerschule: Geometrie vom von Staudtschen Standpunkt ([35]) zu besuchen. Ich hatte mich damals intensiv mit stetigen idempotenten Multiplikationen auf Mannigfaltigkeiten M beschäftigt und insbesondere mit den Einschränkungen, die eine nicht zu Projektionen homotope Multiplikation für die algebraischen Invarianten von M bewirkt ([42]). Vor allem Flächen, die eine solche Multiplikation tragen können, haben mich interessiert, und daraus entspann sich ein folgenreicher Dialog mit Herrn Hofmann (Er: man sollte alle idempotenten Komultiplikationen auf einer graduierten Algebra über einem Hauptidealring klassifizieren, sofern die Komponente des Grades 1 torsionsfrei ist, die Komponente des Grades 2 den Rang 1 hat und die höheren Komponenten verschwinden (vgl. [23])), der wie ich hoffe, noch viele Jahre fortgesetzt werden kann.

Karl Heinrich Hofmann und die Geometrie. Dieser Satz suggeriert, daß Karl Heinrich Hofmann kein Geometer wäre, daß es aber Beziehungen zwischen seinem Werk und der Geometrie gibt. Diese, meiner Ansicht nach irrige Interpretation beruht darauf, daß jeder sich so seinen Reim macht, was Geometrie sei. Ich kenne keine andere mathematische Disziplin, die, wie Geometrie, überall und nirgends angesiedelt wäre und die von einer Ecke in die andere geschubst würde je nach politischem Bedarf. Ich erkläre es mir so, daß möglichst viele Mathematiker Geometer sein wollen, ohne es denjenigen zu gönnen, deren Werk ihnen inhaltlich fernsteht. Und das scheint in der Tat den Zwist zu befördern, daß die Geometrie einem vielgestaltig entgegentritt, weniger ein Gebiet denn als Methode, die einen mahnt, das Konkrete nicht zu verlassen, das einzelne Phänomen zu würdigen und das Beispiel zu achten. Unter den Geometern gibt es zwei extreme Typen. Der eine Typ erkennt als Geometrie nur das, was auch sprachlich eine direkte Verbindung zu Punkten und Geraden herstellt und was in der Tat in den Mathematical Reviews unter der Kennzahl 51 besprochen wird; der andere Typus jedoch meint, über Punkte und Geraden sei alles wesentliche bereits gesagt, und die moderne Geometrie finde dort statt, wo die Fields Medals oder der von Staudt–Preis vergeben werden. Nimmt man aber eine mittlere Position zwischen diesen beiden Extremen ein, kann man mit Fug und Recht behaupten: Karl Heinrich Hofmann ist ein Geometer par excellence, ein Geometer allerdings, der sich zugleich in nichtgeometrischen Diagrammjagden und kategorieller Betrachtungsweise bestens auskennt und so zugleich das Vorurteil widerlegt, die Geometer würden allzu häufig an Beispielen kleben, indem sie die bekanntesten von ihnen immer wieder und unentwegt charakterisierten.

Um die Behauptung zu belegen, das Werk von Karl Heinrich Hofmann ist der Geometrie zuzurechnen, wähle ich diejenigen Teile aus, wo der Bezug zur traditionellen Geometrie auf der Hand liegt, ohne daß man ihn weiter erklären müßte, und zwar auch dann, wenn, wie in den bereits zitierten Sätzen, die Geometrie einem im algebraisch-topologischen Kleid entgegentritt. Denn, und das wird einem beim Studium Hofmannscher Arbeiten klar, im Werk von Karl Heinrich Hofmann verschmilzt die traditionelle Geometrie mit der Topologie und der Algebra so zusammen, daß man eine Grenzziehung unter ihnen als widernatürlich empfände.

Bereits das wissenschaftliche Entrée von Karl Heinrich Hofmann ist durch die Geometrie motiviert, von Koordinatensystemen topologischer Geometrien, die im nicht desarguesschen Fall viele Loops beherbergen. Karl Heinrich Hofmann betritt die wissenschaftliche Arena, indem er in den Ring die Theorie topologischer Loops wirft. Und sein Auftreten ist so nachhaltig, daß man heute, nach dreißig Jahren, die folgende These aufstellen kann: In der allgemeinen Theorie topologischer Loops verdanken wir alle wichtigen Erkenntnisse Karl Heinrich Hofmann; entweder hat er diese Resultate selbst bewiesen oder sie angeregt.

Karl Heinrich Hofmann, die von Kneserschen, Pickertschen und Wielandtschen Ideen damals sirrende Tübinger Luft einatmend, beschloß wohl 1957 eine Theorie topologischer und insbesondere lokal kompakter Loops zu schaffen und zu zeigen, daß derjenige Teil der Theorie topologischer Gruppen, welcher nicht aus Lieschen Quellen gespeist wird, eigentlich aus Sätzen über topologische Quasigruppen und Loops besteht. Dies ist ihm gelungen, bis auf einige Kleinigkeiten, die als offene Probleme noch heute einer Lösung harren. Ich bin aber sicher, daß sie Kyffhäuser Mentalität entwickeln müssen, denn kein junger karrierebewußter Mathematiker schwimmt heutzutage wider den Strom und sucht sein Heil in allgemeiner topologischer Algebra.

Bevor ich an einigen herausgegriffenen Sätzen die eben aufgestellte These zu belegen suche, sei hier ausnahmsweise an die Definition einer topologischen Quasigruppe und einer topologischen Loop erinnert: Eine *Quasigruppe* Q ist eine Menge mit einer binären Operation $(x, y) \mapsto xy\colon Q \times Q \to Q$, so daß die Gleichungen $ax = c$ und $yb = c$ stets eindeutig lösbar sind. Die Lösungen seien mit $x = a\backslash c$ und $y = c/b$ bezeichnet. Hat eine Quasigruppe ein Einselement, so heißt sie eine *Loop*. Eine *topologische Quasigruppe* bzw. *Loop* Q ist eine Quasigruppe bzw. Loop zusammen mit einer Topologie auf Q, so daß die Operationen $(x, y) \mapsto xy,\ x\backslash y,\ x/y$ stetig in beiden Variablen sind. In topologischen Quasigruppen sind die Abbildungen $\lambda_a\colon x \mapsto ax$, $\rho_a\colon x \mapsto xa$, Links- bzw. Rechtstranslationen genannt, Homöomorphismen. Wie stets bei solchen Definitionen entsteht sofort die Frage nach möglichen Abschwächungen; so hier zum Beispiel, ob die Stetigkeit der Multiplikation die Stetigkeit der beiden anderen Operationen nach sich zieht. Dies ist etwa der Fall, wenn Q kompakt ist (vgl. [39], Appendix). Das folgende Beispiel von Karl Heinrich Hofmann zeigt jedoch, daß man sich nicht sehr weit wagen darf:

Es sei L der reelle Hilbertraum ℓ^2 der quadratsummierbaren reellen Folgen. Für $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $y = (y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definiert $xy = (\frac{x_n+y_n}{1+(n-1)|x_1||y_1|})_{n\in\mathbb{N}}$ auf ℓ^2 eine kommutative Loop, so daß $(x, y) \mapsto xy$ stetig ist, aber die Translation $(x_n) \mapsto (x_n)(1, 0, 0, \ldots, 0) = (x_1 + 1, x_i)_{i\geq 2}$ ist nicht offen. Ist L_1 die Teilmenge aller Folgen $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $x_n = 0$ für $n > 1$ und L_2 die Teilmenge aller x mit $x_1 = 0$, so ist die zu ℓ_2 isomorphe abelsche Untergruppe L_2 eine normale Unterloop von L, und es gilt $L = L_1L_2$ sowie $L_1 \cap L_2 = \{0\}$ (vgl. [11], p. 37).

Eine offene Untergruppe einer topologischen Quasigruppe ist abgeschlossen. Ist A eine abgeschlossene und C eine kompakte Teilmenge, so sind AC und CA abgeschlossene Teilmengen von Q (vgl. [11]). Eine topologische Quasigruppe Q, die ein T_0-Raum ist, ist hausdorffsch und regulär (dies ist auch von Herrn

Salzmann bewiesen worden [37]). Ob eine topologische hausdorffsche Quasigruppe auch, wie eine topologische hausdorffsche Gruppe, vollständig regulär ist, weiß man nicht und wird es wohl auch in der nächsten Zukunft nicht wissen wollen.

Ist L eine topologische Loop, so ist die Zusammenhangskomponente der Eins eine abgeschlossene voll invariante Untergruppe. Auch die Bogenzusammenhangskomponente ist voll invariant; sie ist aber im allgemeinen nicht abgeschlossen, was bereits für Solenoide eintritt ([11]).

Es sei $F\colon Q_1 \to Q_2$ ein Epimorphismus topologischer Quasigruppen. Ist Q_1 lokal kompakt und im Unendlichen abzählbar (d.h. eine abzählbare Vereinigung kompakter Mengen) und ist Q_2 ein Baire-Raum, so ist f offen ([11]).

Die Überlagerungstheorie funktioniert für topologische Loops perfekt, sobald die zugrundeliegenden Räume universelle Überlagerungen gestatten: Es sei L eine topologische Loop, $\tilde{L}$ die universelle Überlagerung von L und $p\colon \tilde{L} \to L$ die Überlagerungsabbildung. Dann ist $\tilde{L}$ eine Loop, der Kern $p^{-1}(e)$ ist eine diskrete zentrale Untergruppe von $\tilde{L}$, die, falls L eine topologische Mannigfaltigkeit ist, zur Fundamentalgruppe von L isomorph ist ([6], [11]).

Ist N eine normale Unterloop einer zusammenhängenden topologischen Loop, so ist N zentral, wenn sie eine dichte total unzusammenhängende normale Unterloop enthält oder wenn N kompakt ist.

Die ganze Skala möglicher Abschwächungen des Assoziativgesetzes ist von Karl Heinrich Hofmann gründlich durchforstet worden. Insbesondere an der Ecke, wo man die Unabhängigkeit von der Beklammerung nur für gewisse Potenzen eines beliebigen Elements x verlangt, hat er sich durch Gegenbeispiele pädagogische Verdienste bis in die neueste Zeit erworben.

Fordert man etwa, daß die Produkte des Elementes x bis zu einer gewissen Länge n unabhängig von der Beklammerung sind, so ist man auch in topologischen Loops himmelweit von der Potenzassoziativität entfernt, die besagt, daß jedes Element einer Loop Q in einer Untergruppe von Q enthalten ist. Um dies zu erreichen, reicht es auch nicht zu verlangen, daß jedes Element von Q in einer Unterhalbgruppe liegt, Q, also, wie Hofmann sagt, monoassoziativ ist. Ein Beispiel für diese Situation wird auf $\mathbb{R}$ durch

$$x * y = \begin{cases} x + y, & \text{wenn } xy \geq 0, \\ \frac{x^3+y^3}{x^2+y^2}, & \text{wenn } xy < 0 \end{cases}$$

([7], [11]). Auf eindimensionalen Mannigfaltigkeiten (lokal euklidischen Räumen) konnte Herr Hofmann die monoassoziativen topologischen Loops L klassifizieren. L ist entweder isomorph zur Kreisgruppe SO_2 oder homöomorph zur reellen Zahlengeraden; im letzteren Fall ist L Vereinigung zweier einparametriger Halbgruppen, die sich in e treffen, und eine Liegruppe dann, wenn L potenzassoziativ ist ([7], [11], [15]).

Auch der Unterschied zwischen Loops, in denen je zwei Elemente in einer Unterhalbgruppe und solchen, in denen sie in einer Untergruppe liegen, wurde von Karl Heinrich Hofmann eingehend studiert [16]. Unter den topologischen Loops, die den Liegruppen am nächsten stehen, sind die lokal kompakten zusammenhängenden Moufang-Loops. In diesen liegen nicht nur je zwei Elemente in einer Untergruppe, sondern in ihnen gilt das folgende abgeschwächte Assoziativgesetz: $x(y(zy)) = ((xy)z)y$.

Es gibt ganz wenige kompakte zusammenhängende Moufang-Loops, die keine Gruppen sind. Nimmt man als Punktmenge einen echten Loop L eine zusammenhängende Sphäre, so ist L die Loop der Cayleyzahlen der Norm 1, wenn nur auf L eine linksinvariante Uniformität existiert [25]. Dieses Ergebnis von Hudson geht sicherlich auf die Initiative Karl Heinrich Hofmanns zurück[1] genauso wie die Bedingung der Existenz einer linksinvarianten, rechtsinvarianten oder einer invarianten Uniformität für eine Loop. Für topologische Gruppen existieren linksinvariante Uniformitäten stets. Die Existenz von linksinvarianten Uniformitäten auf lokal kompakten zusammenhängenden topologischen Loops L erzwingt dagegen, daß der Stabilisator G_e eines Elements e in der mit der natürlichen Topologie versehenen von den Linkstranslationen $x \mapsto ax$ erzeugten Transformationsgruppe G von L kompakt ist [28]. Die in dieser Aussage aufscheinende enge Beziehung zwischen einer Loop L und der von den Links- bzw. Rechtstranslationen von L erzeugten Gruppe ist seit den Untersuchungen von Albert im Jahre 1944 ein integraler Bestandteil der Theorie der Loops [1]. Man weiß, ist L eine lokal kompakte Loop, so trägt die Gruppe $\mathfrak{H}$ aller Homöomorphismen von L eine natürliche Topologie (die für kompakte oder lokal zusammenhängende L mit der kompakt-offenen Topologie zusammenfällt), bezüglich der sie eine topologische Transformationsgruppe auf L wird. Ist G der topologische Abschluß der von den Linkstranslationen von L erzeugten Gruppe in $\mathfrak{H}$ und G_e der Stabilisator des Elementes e von L, so existiert ein Schnitt $\sigma\colon G/G_e \to G$ vom Faktorraum G/G_e nach G mit $\sigma(D_e) = e$, so daß die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

1) Die Menge $\sigma(G/G_e)$ erzeugt G topologisch, G/G_e ist lokal kompakt und die Menge aller Funktionen $\xi \mapsto g \cdot \xi$ mit $g \cdot (xG_e) \mapsto (gx)G_e$ ist in der Homöomorphismengruppe von G/G_e abgeschlossen.
2) Zu $\xi\eta \in G/G_e$ gibt es genau ein Element $\omega = \eta/\xi$, so daß $\sigma(\omega)\xi = \eta$ gilt, und genau ein Element $\tilde{\omega} = \xi\backslash\eta$ mit $\sigma(\xi)\tilde{\omega} = \eta$, so daß die Funktionen

$$G/G_e \times G/G_e \to G/G_e : (\xi, \eta) \to \eta/\xi,\ \xi\backslash\eta$$

stetig sind.

Hat man umgekehrt ein Tripel (G, G_e, σ), wobei σ ein Schnitt ist mit allen eben aufgezählten Eigenschaften, so wollen wir σ einen vollständigen einfach transitiven Schnitt nennen. Es ist das Verdienst der Hofmannschen Schule in den Vereinigten Staaten gezeigt zu haben, daß die Kategorien der lokal kompakten topologischen Loops und der vollständigen einfach transitiven Schnitte in topologischen Gruppen äquivalent sind und man daher das Studium lokal kompakter Loops auf das Studium topologischer Gruppen und ihrer Schnitte verlagern kann ([28]).

---

[1] Anm. d. Hrsg.: Sigmund Hudson hörte die Vorlesung [11] in 1960–61, die die nichtassoziative topologische Algebra in die an der Tulane University existierende Tradition der Halbgruppen einführte (A. H. Clifford, P. S. Mostert, A. D. Wallace). Später promovierte Hudson bei Mostert, mit dem K. H. H. zwischen 1960 und 1970 eng zusammenarbeitete.

Jede einigermaßen manierliche topologische affine Ebene läßt sich durch eine topologische Doppelloop koordinatisieren. Dieser direkt aus der Geometrie kommende Begriff wurde von Karl Heinrich Hofmann als erstem einer systematischen Untersuchung unterzogen. Er hat das Fundament der Theorie topologischer Doppelloops gelegt. Dabei versteht man unter einer *topologischen Doppelloop* einen weder die diskrete noch die gröbste Topologie tragenden topologischen Raum zusammen mit zwei Operationen $+$ und $\cdot$, so daß gilt:

(i) $(D,+)$ ist eine topologische Loop mit dem neutralen Element 0, die Menge $D^* = D\backslash\{0\}$ ist eine topologische Loop, und es gilt $0{\cdot}a = a{\cdot}0 = 0$.

(ii) Die Multiplikation: $D^2 \to D$ ist stetig und die Abbildungen $x \mapsto ax$ sowie $x \mapsto xa$ sind für $0 \neq a \in D$ Homöomorphismen von D.

Für topologische Doppelloops gelten die erwarteten Eigenschaften, was die Güte des zugrundeliegenden topologischen Raumes angeht. Ist zum Beispiel die topologische Doppelloop zusammenhängend und hat D eine universelle Überlagerung, so ist bereits D einfach zusammenhängend. Ist D bogenweise zusammenhängend, so ist D zusammenziehbar. Ist D lokal kompakt, so ist D ein separabler vollständiger metrischer Raum, der $\sigma-$kompakt, aber nicht kompakt ist [8], [9].

Ist die Multiplikation einer lokal kompakten zusammenhängenden Doppelloop D assoziativ, so ist D^* topologisch isomorph zur multiplikativen Gruppe der reellen oder komplexen Zahlen bzw. der Quaternionen ([15], [16]). Ist die additive Loop von D assoziativ, so ist sie eine Liegruppe homöomorph zu $\mathbb{R}^n$ mit $n = 1, 2, 4$ oder 8. Karl Heinrich Hofmann klassifizierte eindimensionale lokal kompakte Doppelloops, die das Linksdistributivgesetz erfüllen: Eine solche Doppelloop D ist ein reeller Neokörper, d.h. eine distributive Doppelloop, deren multiplikative Gruppe die der reellen Zahlen ist [8]. Enthält die additive Gruppe von D eine nichttriviale Untergruppe, so ist D der Körper der reellen Zahlen. Daß echte lokal kompakte zusammenhängende Neokörper hinsichtlich der Assoziativität eine sehr schlechte additive Loop haben müssen, hat uns Herr Hofmann ebenfalls eindringlich klargemacht: Liegen in der additiven Loop eines zusammenhängenden lokal kompakten Neokörpers D je zwei Elemente in einer Untergruppe, so ist D der Körper der der reellen oder komplexen Zahlen bzw. der Quaternionen [8].

Es gibt viele Beispiele echter reeller Neokörper. Ist die topologische Dimension eines Neokörpers größer als 1, so ändert sich die Lage schlagartig. Die einzigen höherdimensionalen Beispiele hat Karl Heinrich Hofmann angegeben; es sind komplexe Neokörper, d.h. ihre multiplikative Struktur stimmt mit der multiplikativen Gruppe der komplexen Zahlen überein. Er hat zwei Klassen angegeben [12], [8]. Beispiele der einen Klasse enthalten einen reellen Unterneokörper; ihre Addition ist kompliziert. Will man, daß im komplexen Neokörper kein reeller enthalten ist, kann man auf $\mathbb{C}$ eine Addition wie folgt definieren:

$$x \oplus y = \begin{cases} (x+y)\exp(\frac{34\pi i}{k}\cdot\frac{|xy|^2}{|x+y|^4+|xy|^2}) & \text{für } (x,y) \neq (0,0); \\ 0 & \text{für } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Dabei ist k eine hinreichend große natürliche Zahl.

Die von einem Außenstehenden so genial empfundenen Additionen für komplexe Neokörper geben schon einen Hinweis darauf, wie schwierig es ist, Neokörper mittels Verbiegung der Addition eines Körpers zu konstruieren, wenn sich dieser nicht anordnen läßt.

Die von Karl Heinrich Hofmann 1961 veröffentlichten komplexen Neokörper koordinatisieren zwar keine topologischen Ebenen, weil sie die sogenannte Planaritätsbedingung nicht erfüllen. Doch stießen sie die topologischen Geometer, die zu jener Zeit vollauf mit zweidimensionalen topologischen Ebenen beschäftigt waren, darauf, daß es außer der komplexen Ebene wohl auch deren nichtdesarguessche Schwestern geben müßte. Von diesem Gesichtspunkt her muß man Karl Heinrich Hofmann zu den spirituellen Anregern von Untersuchungen lokal kompakter Ebenen mit höherdimensionalem Punktraum zählen. Im Jahre 1969 haben Peter Plaumann und ich [34] und unabhängig von uns Dieter Betten [3] in Tübingen angefangen, nach einer vierdimensionalen nichtdesarguesschen topologischen Ebene zu suchen; Peter und ich waren dabei durch die Hofmannschen Neokörper motiviert und wählten daher den Weg der Konstruktion eines geeigneten Koordinatenbereichs. Es war uns allerdings klar, daß wir den Hofmannschen Künsten weit unterlegen waren und daß wir, wenn wir Erfolg haben wollten, an einer Ecke anfangen mußten, wo Herr Hofmann noch nicht vorbeigeschaut hatte. Wir haben es mit sogenannten Quasikörpern probiert, in denen die reellen Zahlen im Zentrum liegen und haben nach einigen Kaffeeunterhaltungen auch Erfolg gehabt. Nun im nachhinein ist klar, daß dieser Erfolg im Gegensatz zur Hofmannschen Konstruktion komplexer Neokörper ein unendlich viel billiger ist. Während es inzwischen Galaxien verschiedener komplexer Quasikörper gibt, sind die Hofmannschen komplexen Neokörper exzeptionell geblieben und ziehen auch heute einsam und eigenbrötlerisch ihre Bahn.

Bei Untersuchungen über topologisch algebraische Strukturen kommt man nicht an Sophus Lie vorbei. Dies ist natürlich auch Karl Heinrich Hofmann widerfahren, und das Werk von Lie wurde für sein Schaffen zu einem der wichtigsten Bezugspunkte und Nährquellen. Dreißig Jahre Hofmannscher Mathematik verweilen im Kraftfeld Liescher Intentionen. Obgleich einerseits viele Mathematiker sich als Urenkel von Lie ausgeben, um im "main stream" mitzuschwimmen und obgleich andererseits viele unserer Zunftgenossen redlich das Werk von Lie fortsetzen, indem sie einzelne Fragenkomplexe präzisierend und verallgemeinernd modernen, befriedigenden Lösungen zuführen, hat Karl Heinrich Hofmann für mich am einfühlsamsten und explizitesten die Liesche Philosophie für algebraische Strukturen, die zugleich analytische oder differenzierbare Räume sind, formuliert. Ich möchte heute dieses Programm (dieser Name muß angesichts Erlangens her) das Lie–Cartan–Hofmann–Programm nennen und seine wichtigsten Punkte erläutern. Wie alle Programme formuliert es Bekenntnisse, die durchs Leben gefüllt werden müssen. Daß es nicht bloße Lippenbekenntnisse sind und daß sich die Lieschen Ideen adäquat auf Strukturen übertragen lassen, die keine Liegruppen sind, hat Karl Heinrich Hofmann für analytische Unterhalbgruppen Liescher Gruppen sowie für analytische Loops eindrucksvoll demonstriert. Aber auch für n-stellige analytische Loops ist die Maschine dieses Programms durch Jonathan Smith angeworfen worden und schüttet erste Ergebnisse aus [40].

Das Lie–Cartan–Hofmannsche Programm hat 5 Teile:

(a) einen lokalen Teil,

(b) einen globalen Teil,
(c) einen Kleinschen Teil,
(d) einen differentialgeometrischen Teil,
(e) einen Hilbertschen Teil.

Man untersucht einen mit algebraischen Operationen versehenen analytischen (bzw. C^∞-differenzierbaren) Raum L, so daß diese Operationen analytisch bzw. (C^∞-differenzierbar) sind und so daß L einen bezüglich dieser Operationen ausgezeichneten Punkt e besitzt.

Zu (a). Man entwickle ein vernünftiges Konzept einer lokal analytischen Struktur L und assoziiere zu L den Tangentialraum in e, der dadurch zu einer allgemeinen Algebra $A(L)$ wird, daß man ihm die infinitesimalen Analoga der algebraischen Operationen von L aufprägt.

Für Liegruppen ist $A(L)$ die Liealgebra von L, für analytische Loops ist $A(L)$ die Akivisalgebra von L. Die Akivisalgebra $A(L)$ hat außer der Vektorraumaddition eine binäre und eine ternäre Operation, die durch die sogenannte Akivis–Identität verbunden sind; diese verallgemeinert die Jacobi–Identität. Die binäre Operation der Akivisalgebra $A(L)$ ist ein Maß für die Nichtkommutativität von L, sie entsteht durch Differentiation von Kommutatoren. Die ternäre Operation auf $A(L)$ mißt die Nichtassoziativität von L, sie entsteht durch Differentiation von Assoziatoren (vgl. [22]).

Für analytische Unterhalbgruppen L von Lieschen Gruppen G sind $A(L)$ die sogenannten Lieschen Keile, die in der Liealgebra von G enthalten sind [5].

Für dreistellige analytische Loops hat man außer drei Akivisalgebren, welche den 3 binären Spezialisierungen der Multiplikation entsprechen, als $A(L)$ eine sogenannte Comtransalgebra mit zwei dreistelligen Operationen, dem Kommutator $[\{\,\},\{\,\},\{\,\}]$ und dem Translator $\langle\{\,\},\{\,\},\{\,\}\rangle$. Der Kommutator ist alternativ, der Translator erfüllt die Jacobi–Identität, und die beiden Operationen sind durch die sogenannte Comtransidentität verbunden:

$$[x,y,z]+[z,y,x]=\langle x,y,z\rangle+\langle z,y,x\rangle.$$

Für n-stellige analytische Loops hat man $\binom{n}{2}$ Akivis- und $\binom{n}{3}$ Comtransalgebren (vgl. [40]).

(a1). Man untersuche, wie sich zusätzliche algebraische Eigenschaften von L auf $A(L)$ übertragen. Für Liegruppen etwa die Nilpotenz, Auflösbarkeit, Einfachheit. Für Loops etwa die Potenzassoziativität, die Bedingung, daß je zwei Elemente in einer Untergruppe liegen, was zu binären Liealgebren führt, oder die Moufang–Identität, die die Malcevalgebren gibt (vgl. [30]). Für Liesche in einer Liegruppe G enthaltene Unterhalbgruppen die Invarianz der Liekeile gegen die adjungierte Wirkung von G.

(a2). Betrachte die Algebren $A(L)$ als Algebren aus eigenem Recht; klassifiziere sie oder deren interessante Unterklassen, so gut es geht. Dies ist für Liealgebren und Malcevalgebren weitgehend geleistet. Für Liesche Keile ist die Darmstädter Schule von Herrn Hofmann zuständig; auch hier wurde bereits Enormes geleistet. Für Akivisalgebren und Comtransalgebren liegen, wenn man freundlich sein will, nur Rudimente vor.

(a3). Für eine gegebene Algebra $A(L)$ konstruiere eine lokale analytische algebraische Struktur L^* der betrachteten Klasse, deren Tangentialalgebra in e gerade $A(L)$ ist. In welchem Maße ist L^* durch $A(L)$ bestimmt, in welchem Maße legen algebraische Eigenschaften von $A(L)$ die algebraischen Eigenschaften von L^* fest?

Für Liegruppen existiert L^* und ist eindeutig bestimmt; das gleiche gilt etwa für binäre Liealgebren [30]. Für Akivisalgebren gibt es zu jeder Algebra A mindestens $n\binom{n}{3}$ lokale analytische Loops, die A als Tangentialalgebra haben [22].

Für Liesche Unterhalbgruppen einer Liegruppe G hat man zu jedem Liekeil $\mathfrak{W}$ eine offene Umgebung B von Null in der Liealgebra $L(G)$ von G und eine lokale Halbgruppe S bezüglich B, deren Liekeil gerade $\mathfrak{W}$ ist [5].

Zu (b). Der globale Teil des Lie–Cartan–Hofmannschen Programms ist klar vorgegeben: Gibt es zu jeder lokalen analytisch algebraischen Struktur der betrachteten Klasse eine globale Fortsetzung? Wenn ja, konstruiere sie, wenn nicht, zeige präzise unter welchen Bedingungen es globale Erweiterungen gibt. Klassifiziere diejenigen globalen Formen, die sich als Erweiterungen derselben lokalen Form ergeben.

Für Liesche Gruppen hat diesen Teil des Programms E. Cartan durchgeführt; die Überlagerungen klassifizieren die einer lokalen Form zugehörigen globalen Formen. Für analytische Loops (und n-stellige analytische Loops) weiß man, daß es lokale Formen gibt, die sich nicht zu globalen Formen erweitern lassen. Dies passiert bereits auf $\mathbb{R}$. Definiert man dort $x \circ y = x + y + (xy)^2$, so ist dadurch eine lokale kommutative analytische Loop mit 0 als Identität gegeben. Die Gleichung $x \circ y = z$ ist für kleine z und y in x lösbar, nämlich durch die der Null benachbartere der beiden Lösungen der quadratischen Gleichung $x^2y^2 + x + y - z = 0$, aber es gibt keine globale analytische Loop auf $\mathbb{R}$, die diese lokale Loop erweitert. Welche lokalen Loops sich zu globalen Formen erweitern lassen, wird vielleicht nie klar sein.

Für analytische Halbgruppen ist die Situation kompliziert; man kann aber mit dem Schlagwort 'globaler Liekeil' darauf verweisen, daß Karl Heinrich Hofmann in seinem mit Hilgert und Lawson verfaßten Buch [5] die ersten Antworten zum globalen Teil seines Programms in dieser Situation geliefert hat.

Daß Überlagerungen einer analytischen Loop zu derselben lokalen Loop L gehören, ist klar, doch die Vielfalt derer, die zu L gehören, kann wohl größer sein.

Zu (c). Wenn man vom Kleinschen Teil des Hofmannschen Programms spricht, so ist es klar, daß dabei Gruppen ins Spiel kommen müssen, die in natürlicher Weise der analytisch algebraischen Stuktur L zugeordnet sind. Es sind nicht nur die Automorphismengruppen von L. Da diese, etwa für nichtassoziative Strukturen häufig zu klein sind, werden auch Gruppen behandelt, deren Beziehung zu der Struktur L etwas lockerer ausfällt, aber doch ausreicht, eine Ehe zwischen L und diesen Gruppen zu stiften. Für Loops und n-stellige Loops werden die von verschiedenen Mengen von Translationen $\lambda^i_{a_1,\dots,a_{n-1}} : x \mapsto f(a_1, \dots, x_i, \dots, a_{n-1})$ erzeugten Gruppen betrachtet. Loops kann man, wie wir gesehen haben, mit gewissen Transversalen in den von den Linkstranslationen erzeugten Gruppen identifizieren.

Die Fragen, die uns der Kleinsche Teil des Hofmannschen Programms anbietet, sind: Ist die Gruppe G, die der analytisch algebraischen Struktur L zugeordnet ist, Liesch und wenn nicht, was sind die notwendigen und hinreichenden Bedingungen an L, damit G Liesch werde. Für Liesche Loops sind die hinreichenden Bedingungen extrem nicht nur von der Struktur L, sondern auch von der zugeordneten Gruppe G abhängig. So kann für echte Loops nur die von den Links- bzw. Rechtstranslationen topologisch erzeugte Gruppe eine Liegruppe sein, nie die von allen Translationen erzeugte Gruppe [32].

Kann man aus der Kenntnis von G auf die Struktur von L schließen? Es ist klar, daß man nur in seltenen Fällen hier zu einer positiven Antwort wird kommen können.

Ein anderer Aspekt, der unter diesen Teil des Programms fällt, ist der Fragenkreis, wie die Struktur L die Invarianten der algebraischen Topologie, so etwa die Homotopiegruppen und den Kohomologiering von L einschränkt. Für einfache Liegruppen G etwa weiß man, daß der Homotopietyp der Mannigfaltigkeit G bereits den Isomorphietyp von G bestimmt [38]. Herr Hofmann hat in einem Buch mit P. S. Mostert [20] für kompakte abelsche Gruppen eindrucksvolle Ergebnisse in dieser Richtung geliefert.

Zu (d). Der differentialgeometrische Teil des Hofmannschen Programms betrachtet die analytisch algebraische Struktur L als Objekt der Differentialgeometrie; er regt an, in L natürliche affine Zusammenhänge $\bigtriangledown$ einzuführen, so daß sich die algebraischen Operationen aus den zu $\bigtriangledown$ gehörenden Tensoren ableiten lassen. So läßt sich etwa für Liegruppen L die negative Lieklammer als der Torsionstensor bezüglich eines linksinvarianten Zusammenhangs denken und damit läßt sich unter Benutzung der Campbell-Hausdorff-Formel lokal die Multiplikation von L rekonstruieren. Für Liesche Loops L gibt es mehrere Zusammenhänge, bezüglich deren durch den Torsionstensor in der Identität die binäre und durch den Krümmungstensor in der Identität die ternäre Operation der Akivisalgebra von L gegeben ist (vgl. [21]).

Zu (e). Der Hilbertsche Teil des Hofmannschen Programms drückt die Bestrebungen von Herrn Hofmann aus, die Aspekte des 5. Hilbertschen Problems für jede geeignete analytisch algebraische Struktur L auszuloten. Für Lie Loops hat es sein Schüler Hudson getan [26], [27], für Liesche Halbgruppen beschäftigt sich mit diesem Problemkreis das letzte Kapitel des Hilgert-Hofmann-Lawsonschen Buches.

Die Ausgangssituation des Problems ist klar. Man startet mit einer topologisch algebraischen Struktur L, die auf einer topologischen Mannigfaltigkeit lebt oder, allgemeiner, lokal kompakt, zusammenhängend, lokal zusammenhängend und endlichdimensional ist. Man fragt nach den hinreichenden und notwendigen Bedingungen, damit man auf L eine analytische Struktur so einführen kann, daß die algebraischen Operationen von L analytische Abbildungen werden.

Für lokal kompakte, zusammenhängende, lokal zusammenhängende und endlichdimensionale topologische Gruppen findet man eine solche analytische Struktur stets [31]. Bereits im Jahre 1959 hat Herr Hofmann eine auf $\mathbb{R}^3$ realisierte topologische kommutative Loop angegeben, die nicht Liesch ist, in der aber sogar je zwei Elemente in einer Untergruppe liegen [7]. Eine hinreichende Bedingung, damit man einer lokal kompakten lokal zusammenhängenden, zusammenhängenden Loop L eine Liesche Struktur aufprägen kann, ist die Existenz einer (gegen Links- und Rechtstranslationen) invarianten Uniformität. Wenn man auf zweiseitige Uniformität [26] verzichtet, so kann man den folgenden Satz beweisen: *Eine lokal kompakte, zusammenhängende und lokal zusammenhängende Loop, die eine linksinvariante Uniformität besitzt, ist Liesch, wenn eine der folgenden Bedingungen erfüllt ist:* (1) L *ist kompakt oder abelsch und besitzt auch eine rechtsinvariante Uniformität.* (2) L *ist eindimensional* (vgl. [25], [26]).

Ist eine lokal euklidische Halbgruppe eine analytische Halbgruppe? Das im Hilgert-Hofmann-Lawsonschen Buch [5] angegebene Standardbeispiel der mittels $x \circ y = \min\{x, y\}$ auf der reellen Zahlengeraden realisierten Halbgruppe zeigt, daß dies im allgemeinen verneint werden muß. Als eine hinreichende Bedingung, damit das 5. Hilbertsche Problem für Halbgruppen positiv beantwortet werden kann, erweist sich die Bedingung der Kürzbarkeit, die einem Geometer selbstredend natürlich erscheint. Und Herr Hofmann war sicherlich der Motor und ist ein Mitautor des folgenden Satzes: *Ist* L *eine kürzbare topologische Halbgruppe auf einer topologischen Mannigfaltigkeit (eventuell mit einem verallgemeinerten Rand), so gestattet* L *eine analytische Struktur bezüglich der die Multiplikation analytisch wird* ([24]).[2]

Zum Schluß möchte ich hervorheben, daß die Hofmannsche Mathematik immer aktuell bleibt. Seine Fragen werden immer neu aufgegriffen; entweder von ihm oder von anderen. Als Beispiel möchte ich das Problem der Klassifikation der Unteralgebren der Kodimension 1 in einer reellen Liealgebra erwähnen, welches auf Lie selbst zurückgeht und von J. Tits [43] behandelt wurde. Karl Heinrich Hofmann schrieb 1963 eine Arbeit darüber [17] und gab 1990 eine vollständige Klassifikation [18], als klar geworden war, daß Liekeile vieler in Liegruppen enthaltener Liescher Halbgruppen, die lokal von Einparametergruppen überdeckt werden, als Durchschnitte von solchen Algebren darstellbar sind [4]. Detlef Poguntke wiederum zeigt in einer 1992 erschienenen Arbeit [36], wie man die Hofmannsche Klassifikation einer effektiven Berechnung zugänglich machen kann. So ist es mit fast allen Hofmannschen Ideen; es ergeht ihnen wie einem guten Wein. Sie werden nicht älter, sondern reifer.

[2] Anm. d. Hrsg.: Dieser Satz taucht erstmalig 1973 in der Dissertation von R. Houston auf, einem Schüler von Denny Brown. Eine zur Veröffentlichung zubereitete Version wurde von K. H. H. referiert. Der Referentenbericht, aber mehr noch andere Umstände verzögerten die Erstpublikation: D. R. Brown and R .S. Houston, Cancellative semigroups on manifolds, Semigroup Forum 35 (1987), 279–302. Die Arbeit [24] geht das Problem mit neuen Ideen aus der Garbentheorie an.

References

[1] Albert, A. A., *Quasigroups II*, Trans. Amer. Math. Soc. **55** (1944), 401–419.

[2] Bachmann, F., „Aufbau der Geometrie aus dem Spiegelungsbegriff“, Grundlehren der Math. Wiss., Band **96**, Springer Verlag, Berlin- Göttingen–Heidelberg 1959, 2. Auflage 1973.

[3] Betten, D., *Nicht-desarguessche 4-dimensionale Ebenen*, Archiv d. Math. **21** (1970), 100–102.

[4] Eggert, A., *Lie semialgebras in reductive Lie algebras*, Semigroup Forum 41 (1990), 115–121.

[5] Hilgert, J., K. H. Hofmann, and J. D. Lawson, "Lie Groups, Convex Cones and Semigroups," Clarendon Press, Oxford 1984.

[6] Hofmann, K. H., *Topologische Loops*, Math. Z. **70** (1958),13–37.

[7] —, *Topologische Loops mit schwachen Assoziativitätsforderungen*, Math. Z. **70** (1958),125–155.

[8] —, *Topologische distributive Doppelloops*, Math.Z. **71** (1959), 36–68.

[9] —, *Topologische Doppelloops und topologische Halbgruppen*, Math. Ann. **138** (1959), 239–258.

[10] —, *Über die topologische und algebraische Struktur topologischer Doppelloops und einiger topologischer projektiver Ebenen*, in: Algebraical and Topological Foundation of Geometry, (Proc. Colloq. Utrecht, 1959), H. Freudenthal, Ed. Pergamon Press, Oxford, 1962, 57–62.

[11] —, *Non-associative Topological Algebra*, Tulane University Lecture Notes, 1961.

[12] —, *Ein komplexer Neokörper ohne reellen Unterneokörper*, Math. Z. **75** (1961), 295–298.

[13] —, *Connected abelian groups in compact loops*, Trans. Amer. Math. Soc. **104** (1962), 132–143.

[14] —, *Einführung in die Theorie der Lie-Gruppen, Teil II.*, Vorlesungsausarbeitung von F. Lorenz, Universität Tübingen, 1963.

[15] —, *Über lokalkompakte positive Halbkörper*, Math. Ann. **151** (1963), 262–271.

[16] —, *Locally compact semigroups in which a subgroup with compact complement is dense*, Trans. Amer. Math. Soc. **106** (1963), 19–51.

[17] —, *Lie algebras with subalgebras of codimension one*, Illinois J. Math **9** (1965), 639–643.

[18] —, *Hyperplane subalgebras of real Lie algebras*, Geom. Dedicata **36** (1990), 207–224.

[19] Hofmann, K. H., and P. S. Mostert, *Splitting in topological groups*, Mem. Amer. Math. **43** (1963).

[20] —, "Cohomology Theories for Compact Abelian Groups," Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York 1973.

[21] Hofmann, K. H., and K. Strambach, *Torsion and curvature in smooth loops*, Publ. Math. Debrecen **38** (1991), 189–214.

[22] —, *Lie's fundamental theorems for local analytical loops*, Pacific J. Math. **123** (1986), 301–327.

[23] —, *Idempotent multiplications on cohomology surfaces*, Rocky Mountain J. Math. **21** (1991), 335–374.

[24] Hofmann, K. H., and W. Weiss, *More on cancellative semigroups on manifolds*, Semigroup Forum **37** (1988), 93–111.

[25] Hudson, S. N., *Topological loops with invariant uniformities*, Trans. Amer. Math. Soc. **109** (1963), 181–190.

[26] —, *Lie loops with invariant uniformities*, Trans. Amer. Math. Soc. **115** (1965), 417–432.

[27] —, *Lie loops with invariant uniformities II*, Trans. Amer. Math. Soc. **118** (1965), 526–533.

[28] —, *Transformation loops in the theory of topological groups*, Proc. Amer. Math. Soc. **15** (1964), Errata ibid. 17 (1966).

[29] Lee, D. H., *Supplements for the identity component in locally compact groups*, Math. Z. **104** (1968), 28–49.

[30] Malcev, A. I., *Analytic loops* (Russian), Mat. Sb. **36** (1955), 569–576.

[31] Montgomery, D., and L. Zippin, "Topological Transformation Groups," Wiley Intersc. Publ., New York, 1955.

[32] Nagy, P., and K. Strambach, *Loops and symmetric spaces*, (manuscript).

[33] Plaumann, P., *Erweiterung kompakter Gruppen durch abelsche Gruppen*, Math. Z. **99** (1967), 123–140.

[34] Plaumann, P., and K. Strambach, *Zusammenhängende Quasikörper mit Zentrum*, Archiv Math. **21** (1970), 455–465.

[35] —, Editors, "Geometry—von Staudt's Point of View," Proceedings NATO ASI, Reidel Publishing Company,Dordrecht & Boston & London, 1981.

[36] Poguntke, D., *The theorem of Lie and hyperplane subalgebras of Lie algebras*, Geom. Dedicata **43** (1992), 83–91.

[37] Salzmann, H., *Topologische projektive Ebenen*, Math. Z. **67** (1957), 436–466.

[38] Scheerer, H., *Sur la topologie des groupes compacts connexes*, C. R. Acad. Sci. Paris Ser A **274** (1972), 1441–1443.

[39] Scheerer, H., and K. Strambach, *Idempotente Multiplikationen*, Math. Z. **182** (1983), 95–119,.

[40] Smith, J. D. H., *Multilinear algebras and Lie's Theorem for formal n-loops*, Archiv Math. **51** (1988), 169–177.

[41] Strambach, K., *Über die Zerlegungsgleichheit von Polygonen bezüglich Untergruppen nicht-euklidischer Bewegungsgruppen*, Math. Z. **93** (1966), 276–288.

[42] —, *Reguläre idempotente Multiplikationen*, Math. Z. **145** (1975), 63–68.

[43] Tits, J., *Sur une classe de groupes de Lie résolubles*, Bull. Soc. Math. Belg. **11** (1959), 100–115.

Mathematisches Institut
Universität Erlangen-Nürnberg
Bismarckstr. $1\frac{1}{2}$
W-8450 Erlangen, Germany

Received November 13, 1992