Seminar Sophus Lie
2 (1992) 199–204

Nilpotente Liealgebren und endliche Pro-p-Gruppen

Jürgen Wisliceny

Die hier darzustellenden Ergebnisse hängen mit dem Satz von GOLOD-ŠAFAREVIČ zusammen. Dieser Satz besagt: Ist G eine Pro-p-Gruppe, d ihr Erzeugendenrang und r ihr Relationenrang, so folgt aus der Endlichkeit von G die Ungleichung

$$r > \frac{d^2}{4} \tag{1}$$

(siehe [1,8]). Ein entsprechendes Ergebnis gilt auch für endlich präsentierte Liealgebren hinsichtlich der Nilpotenz (KOCH [3]). Die Abschätzung (1) ist dabei in einem gewissen Sinn optimal. Diesbezüglich konnte gezeigt werden (WISLICENY [9]): Es gibt Folgen $(X_d)_{d\epsilon N}$ endlicher Pro-p-Gruppen X_d (beziehungsweise nilpotenter Liealgebren X_d) mit

$$\lim_{d\to\infty} \frac{r_d}{d^2} = \frac{1}{4}, \tag{2}$$

wobei d den Erzeugendenrang und r_d den Relationenrang von X_d bezeichnet. In enger Beziehung zum Beweis dieser Optimalitätsaussage stehen Erhöhungssysteme, die in einer beliebigen freien Liealgebra von endlichem Rang betrachtet werden können und die stets die Nilpotenz der damit präsentierten Liealgebren sichern. Hierauf wird in Abschnitt 1 eingegangen. Im Abschnitt 2 wird die Frage nach der Optimalität der Ungleichung (1) in einer schärferen Form gestellt, wobei für $d \leq 7$ Ergebnisse angegeben werden können. Schließlich werden im Abschnitt 3 auf (1) und (2) bezogene Aussagen für den Fall der Varietäten der metabelschen Liealgebren sowie der metabelschen Pro-p-Gruppen behandelt. Eine entsprechende Untersuchung weiterer Varietäten könnte eine lohnende Aufgabe sein.

1. Erhöhungssysteme

Zum Beweis von (2) wurde in [9] zu jedem $d \geq 2$ in der freien Liealgebra $L(x_1, \ldots, x_d)$ vom Rang d über einem beliebigen Körper ein spezielles Relationensystem angegeben, das eine nilpotente Liealgebra präsentiert. Die Übertragung auf Pro-p-Gruppen G (für $p > 2$) erfolgte durch Einbeziehung des graduierten Objektes gr$G$ bezüglich der unteren p-Zentralreihe. Allgemeiner als die in [9] betrachteten Relationensysteme sind die wie folgt definierten Erhöhungssyteme.

Definition 1.1. *Eine Teilmenge R von $L(x_1, \ldots, x_d)$ wird ein* Erhöhungssystem *genannt, wenn folgende Bedingungen erfüllt sind:*

1. Jedes Element h aus R läßt sich in der Form

$$\sum_{\nu=1}^{n(h)} x_{i_\nu} x_{j_\nu} \tag{3}$$

schreiben, wobei $n(h)$ eine natürliche Zahl ≥ 1 und für jedes ν mit $1 \leq \nu < n(h)$ die Bedingung $1 \leq i_\nu < j_\nu < i_{\nu+1} < j_{\nu+1} \leq d$ erfüllt ist.

2. Zu jedem Monom $x_i x_j$ der Länge 2 mit $i < j$ gibt es genau ein Element aus h, so daß dieses Monom in der Darstellung (3) als Summand auftritt.

Relationen h aus einem Erhöhungssystem R sollen *einfach* genannt werden, wenn $n(h) = 1$ gilt. Andernfalls heißen sie *zusammengesetzt.* Mit $I(R)$ wird das von R in $L(x_1, \ldots, x_d)$ erzeugte Ideal bezeichnet.

Beispiel 1.2. $d = 6$; $R = \{x_1x_2 + x_3x_4 + x_5x_6\,,\ x_2x_3 + x_4x_5\,,\ x_1x_3 + x_4x_6\,,\ x_2x_4\,,\ x_3x_5\,,\ x_1x_4\,,\ x_2x_5\,,\ x_3x_6\,,\ x_1x_6\,,\ x_2x_6\}$.

Es handelt sich hierbei um ein Erhöhungssystem minimaler Länge. Man kann leicht zeigen, daß die Anzahl $a(d)$ der Elemente eines Erhöhungssystems minimaler Länge durch

$$a(d) = \frac{d^2}{4} + \frac{d}{2} - \frac{7 + (-1)^d}{8} \tag{4}$$

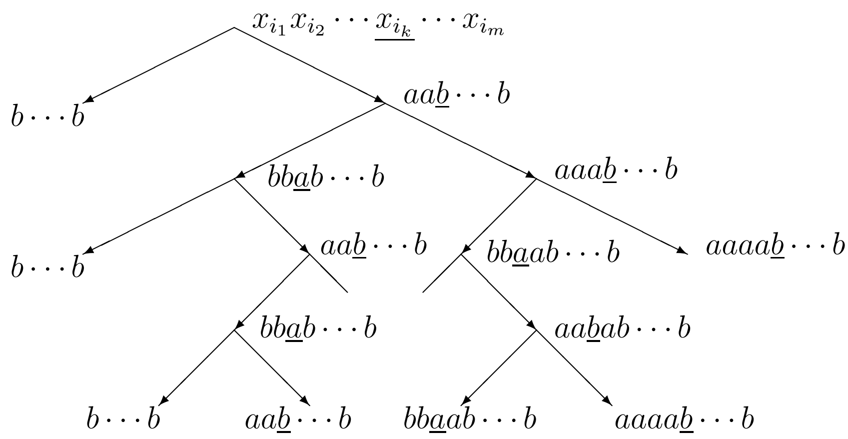
gegeben ist. Es gilt

Satz 1.3. *Jede durch ein Erhöhungssystem präsentierbare Liealgebra ist nilpotent.*

In der nachfolgenden Beweisskizze wird eine verbesserte und allgemeinere Version des entsprechenden Beweises in [9] erläutert. Es sei $l = x_{i_1} \cdots x_{i_m}$ ein kanonisch geklammertes Liemonom der Länge m in den Erzeugenden $x_1, \ldots, x_d$. Ferner werde nach einer noch zu treffenden Vereinbarung ein Faktor x_{i_k} aktiver Faktor von l genannt. In Anwendung der Jacobi-Identität ergibt sich eine Darstellung

$$x_{i_1} \cdots x_{i_m} = \sum \pm x_{i_k} x_{i_{\pi(1)}} \cdots x_{i_{\pi(k-1)}} x_{i_{k+1}} \cdots x_{i_m}, \tag{5}$$

wobei π eine gewisse Teilmenge der Menge aller Permutationen von $\{1, \ldots, k\}$ durchläuft. Unter Berücksichtigung der Relation h, in der $x_{i_k} x_{i_{\pi(1)}}$ beziehungsweise $x_{i_{\pi(1)}} x_{i_k}$ als Summand vorkommt, erhält man $x_{i_1} \cdots x_{i_m}$ als eine endliche Summe modulo $I(R)$ von Liemonomen $x_{k_1} \cdots x_{k_m}$, bei denen entweder $\max\{i_1, i_2\} < \min\{k_1, k_2\}$ oder $\min\{i_1, i_2\} > \max\{k_1, k_2\}$ gilt. Wir schreiben $x_{i_1} \cdots x_{i_m} \searrow x_{k_1} \cdots x_{k_m}$ beziehungsweise $x_{k_1} \cdots x_{k_m} \swarrow x_{i_1} \cdots x_{i_m}$ in Abhängigkeit von diesen beiden Möglichkeiten. Ausgehend vom Liemonom $l = x_{i_1} \cdots x_{i_m}$ wird nun ein Umformungsalgorithmus gemäß des folgenden Schemas erklärt.



Dabei sei i_k ein Index mit $i_k = \max\{i_\mu : 1 \le \mu \le m\}$ und es sei x_{i_k} der aktive Faktor des Ausgangsmonoms. Ferner wurden zur übersichtlicheren Darstellung bei den weiteren Liemonomen Erzeugende x_i im Fall $i > i_k$ mit a und im Fall $i \le i_k$ mit b gekennzeichnet. Die aktiven Elemente sind jeweils wie folgt festgelegt. Beginnt ein Liemonom mit einem durch a gekennzeichneten x_i, so ist das erste durch ein b gekennzeichnete x_i der aktive Faktor. Analog erfolgt die Festlegung bei einem Beginn mit b. Im obigen Schema wurden die aktiven Faktoren durch Unterstreichen hervorgehoben. Für zwei Liemonome u, v soll $u \longrightarrow v$ bedeuten, daß v aus u längst eines gerichteten Weges im beschriebenen Algorithmus entsteht. Wird nun m hinreichend groß gewählt, z.B. $m > u_{d+1}$, wobei (u_ν) die Folge der Fibonaccizahlen bezeichne, so führt der Algorithmus zu $l = x_{i_1}\cdots x_{i_m} \equiv 0$ modulo $I(R)$. Wir bemerken dazu noch folgendes:

1. $l \equiv 0$ wird mittels des beschriebenen Algorithmus durch vollständige Induktion nach

$$g(x_{i_1}\cdots x_{i_m}) := \sum_{\mu=1}^{m} i_{\pi(\mu)} d^\mu \tag{6}$$

bewiesen, wobei π eine Permutation mit $i_{\pi(1)} \le \cdots \le i_{\pi(m)}$ bezeichne.

2. Es gilt niemals $w \longrightarrow w$. (Dies zu zeigen erfordert detailliertere Betrachtungen, die hier nicht ausgeführt werden können.)

3. Für die Liemonome w der Form $b\cdots b$ am linken Rand des obigen Schemas gilt $g(w) < g(l)$ und daher $w \equiv 0$ modulo $I(R)$.

4. Aus $m > u_{d+1}$ folgt, daß für die Liemonome w der Form $a\cdots a$ ebenfalls $w \equiv 0$ modulo $I(R)$ gilt.

2. Weitere Untersuchungen zur Optimalität

Im Zusammenhang mit (1) und (2) ist es naheliegend nach der minimalen Anzahl $r_{min}(d)$ von Relationensystemen zu fragen, mit denen in der Klasse der Pro-p-Gruppen vom Erzeugendenrang d eine endliche p-Gruppe bzw. in der Klasse der Liealgebren vom Erzeugendenrang d eine nilpotente Liealgebra präsentiert wird. In beiden Fällen gilt gemäß (1) und (4) für $d \ge 3$

$$\frac{d^2}{4} < r_{min}(d) \le \frac{d^2}{4} + \frac{d}{2} - \frac{7+(-1)^d}{8}\,. \tag{7}$$

Im Fall der Liealgebren gilt $r_{min}(1) = 0$, $r_{min}(2) = 1$, $r_{min}(3) = 3$, $r_{min}(4) = 5$.

Vermutung 2.1. *Für die Klasse der Liealgebren gilt*

$$r_{min}(d) = \frac{d^2}{4} + \frac{d}{2} - \frac{7 + (-1)^d}{8} \tag{8}$$

für alle $d \geq 1$.

Für den Fall der Pro-p-Gruppen waren bisher $r_{min}(1) = 1$, $r_{min}(2) = 2$, $r_{min}(3) = 3$ und $r_{min}(4) = 5$ bekannt (siehe [2,4,10]). Im Unterschied zum Fall der Liealgebren gilt für Pro-p-Gruppen wahrscheinlich

$$r_{min}(d) < \frac{d^2}{4} + \frac{d}{2} - \frac{7 + (-1)^d}{8} \tag{9}$$

für alle $d \geq 5$. Dies konnte für $d = 5$, $d = 6$ und $d = 7$ bewiesen werden [6]. Es gilt $r_{min}(5) = 7$, $r_{min}(6) = 10$ sowie $13 \leq r_{min}(7) \leq 14$.

Für den Beweis dieser Aussagen über Pro-p-Gruppen wurde gezeigt, daß die nachfolgenden Relationensysteme endliche p-Gruppen in der Kategorie der Pro-p-Gruppen (also in Bezug auf die entsprechende freie Pro-p-Gruppe) präsentieren.

Beispiel 2.2. $d = 5$**,** $r = 7$**;** (x_1, x_2), $(x_1, x_3)x_3^p$, $(x_5, x_3)x_1^p$, $(x_4, x_5)x_4^p$, $(x_1, x_5)(x_4, x_2)$, $(x_4, x_1)(x_2, x_3)x_2^p x_3^p$, $(x_4, x_3)(x_2, x_5)x_5^p$

Beispiel 2.3. $d = 6$**,** $r = 10$**;** (x_1, x_2), (x_1, x_6), (x_5, x_6), $(x_1, x_3)x_3^p$, $(x_4, x_6)x_6^p$, $(x_1, x_5)(x_4, x_2)$, $(x_4, x_3)(x_2, x_5)x_5^p$, $(x_2, x_6)(x_5, x_3)x_1^p$, $(x_4, x_5)(x_6, x_3)x_4^p$, $(x_4, x_1)(x_2, x_3)x_2^p x_3^p$

Beispiel 2.4. $d = 7$**,** $r = 14$**;** (x_1, x_6), (x_1, x_7), $(x_5, x_2)x_7^p$, $(x_7, x_2)x_1^p$, $(x_3, x_4)x_4^p$, $(x_6, x_3)x_6^p$, $(x_5, x_4)x_4^p$, $(x_1, x_2)(x_3, x_7)$, $(x_1, x_3)(x_4, x_7)$, $(x_1, x_4)(x_5, x_7)$, $(x_1, x_5)(x_6, x_7)$, $(x_2, x_6)(x_3, x_5)$, $(x_4, x_6)(x_2, x_3)x_3^p$, $(x_2, x_4)(x_5, x_6)x_4^p x_2^{-p}$

Im Zusammenhang mit dem Beweis der Endlichkeit dieser Pro-p-Gruppen sei auf folgendes hingewiesen. In der $F_p[\pi]$-Liealgebra gr$G$ gelten (triviale) Relationen, die aus den definierenden Relationen der jeweiligen Pro-p-Gruppe G entstehen, indem die Multiplikation durch die Addition, die Kommutatorbildung durch die Multiplikation und p-Potenzbildung durch die Wirkung mit π ersetzt werden. Die durch diese Relationen präsentierte $F_p[\pi]$-Liealgebra $\mathcal{G}$ ist im allgemeinen nur eine Faktoralgebra von gr$G$. Bei den oben genannten Pro-p-Gruppen gelingt es nicht die Endlichkeit von $\mathcal{G}$ nachzuweisen. Es müssen auch sogenannte nichttriviale Relationen (SKOPIN [7]) für gr$G$ in Betracht gezogen werden. Bei dem ersten Beispiel ($d = 5$, $r = 7$) gelang ein Beweis der Endlichkeit von gr$G$ und damit von G auf diese Weise. Für die beiden anderen Gruppen konnte die Endlichkeit auf der Grundlage des *nilpotent quotient algorithm* (NEWMAN [5]) mittels Computereinsatz festgestellt werden.

3. Nilpotenz metabelscher Liealgebren

Die Varietät der metabelschen Liealgebren ist durch die Identität $(ab)(cd) = 0$ definiert. Bei der Untersuchung der Frage, ob zur Erreichung von Nilpotenz die Anzahl von Relationen in der freien metabelschen Liealgebra $\mathcal{L}(d)$ vom Rang d ebenfalls von der Größenordnung d^2 sein muß, konnte gezeigt werden, daß man mit wesentlich weniger Relationen auskommt. Es gilt

Satz 3.1. *Es existiert ein System $R \subseteq \mathcal{L}(d)$ mit $|R| = 2d-3$ und $\mathcal{L}(d)/I(R)$ ist nilpotent.*

Zum Beweis sei auf [11] verwiesen. Das dort verwendete Relationensystem R ist das folgende:

$R(d) = \{h_s : s = 3 \ldots 2d-1\}$, wobei die Relationen h_s durch

$$h_s = \sum_{i<j, i+j=s} x_i x_j \tag{10}$$

erklärt sind. Aus Satz 2 ergibt sich für Pro-p-Gruppen das folgende Ergebnis.

Satz 3.2. *In der Varietät der metabelschen Pro-p-Gruppen gibt es zu jedem d mit $d > 2$ in der freien metabelschen Pro-p-Gruppe $\mathcal{F}(x_1, \ldots, x_d)$ ein Relationensystem $\mathcal{R}(d)$ bestehend aus $2(d-1)$ Relationen, so daß die damit präsentierte metabelsche Pro-p-Gruppe G endlich ist.*

Proof. In Anlehnung an die Relationen h_s werden in $\mathcal{F}(x_1, \ldots, x_d)$ die Relationen $\mathcal{H}_s$ durch

$$\mathcal{H}_s = \prod_{i<j, i+j=s} (x_i, x_j) \tag{11}$$

erklärt, wobei (x_i, x_j) den Kommutator $x_i^{-1} x_j^{-1} x_i x_j$ bezeichnet. Das Relationensystem für G sei durch

$$\mathcal{R}(d) = \{x_1^p\} \cup \{\mathcal{H}_s x_{s-1}^p : s = 3, \ldots, d+1\} \cup \{\mathcal{H}_s : s = d+2, \ldots, 2d-1\}$$

festgelegt. Bei Übergang zu $L = \mathrm{gr}G$ betrachtet als $F_p[\pi]$-Liealgebra ergeben sich aus $\mathcal{R}(d)$ für $\mathrm{gr}G$ die Relationen πx_1, $h_s + \pi x_{s-1}$ für $s = 3, \ldots d+1$ sowie h_s für $s = d+2, \ldots, 2d-1$. Aus den π enthaltenden Relationen erhält man die Existenz einer natürlichen Zahl k mit $\pi^k x_i = 0$. Aus dem Beweis von Satz 2 erhält man ferner die Gültigkeit von $L_{n+1} \subseteq \pi L_n$ für genügend großes n. Es folgt die Endlichkeit von $\mathrm{gr}G$ und somit auch die Endlichkeit von G. ■

References

[1] Golod, E. S., und I. R. Šafarevič, *Über Klassenkörpertürme*, Izv. Akad. nauk SSSR **28** (1964), 261–272 (russisch).

[2] Havas, G., and M. F. Newman, *Presentation of finite groups*, Preprint, Canberra 1982.

[3] Koch, H., *Erzeugenden- und Relationenrang für endlichdimensionale nilpotente Liesche Algebren*, Algebra i Logika **16** (1977), 364–374.

[4] Mennicke, J., *Einige endliche Gruppen mit drei Erzeugenden und drei Relationen*, Arch. Math. **10** (1959), 409–418.

[5] Newman, M. F., *Calculating presentations for certain kinds of quotient groups*, *SYMSAC 76*, Proc. ACM Sympos. on Symbolic Algebraic Computation, New York, 1976, 2–9.

[6] Newman, M. F., und J. Wisliceny, Vorträge, Mathem. Forschungsinst. Oberwolfach, 1992.

[7] Skopin, A. I., *Das Relationenideal*, Trudy Mat. Inst. Steklova **80** (1964), 117–128 (russisch).

[8] Vinberg, E. B., *Zum Dimensionssatz assoziativer Algebren*, Izv. Akad. nauk SSSR **29** (1965), 209–214 (russisch).

[9] Wisliceny, J., *Zur Darstellung von Pro-p-Gruppen und Lieschen Algebren durch Erzeugende und definierende Relationen*, Math. Nachr. **102** (1981), 57–78.

[10] —, *Beispiel einer endlichen Pro-p-Gruppe vom Erzeugendenrang* 4 *und Relationenrang* 5, Wiss. Zeitschrift der Päd. Hochschule Güstrow **1** (1978), 31–34.

[11] Wisliceny, J., and R. Zerck, *Generators and relations for metabelian Lie algebras*, Math. Proc. Camb. Phil. Soc., 1992, to appear.

Mathematik
Universität Rostock
Außenstelle Güstrow
Goldberger Str. 12
O-2600 Güstrow (Germany)

Received October 27, 1992