Seminar Sophus Lie
3 (1993) 257–267 Version of July 15, 1995

Über das 5. Hilbert'sche Problem[1]

Karl H. Hofmann

Meine Damen und Herren, ich danke dem Mathematischen Institut der Universität Erlangen für die ehrenvolle Einladung, einen Vortrag im zweiten Otto Haupt-Kolloquium zu halten. Unter den richtungweisenden Problemen, die HILBERT in Paris 1900 vortrug, ist das fünfte eines der bekanntesten. Es handelt von den von SOPHUS LIE eingeführten Gruppen; bekannt dürfte auch sein, daß dieses Problem (oder was man gemeinhin für das 5. HILBERTsche Problem hält) im Jahr 1952 durch Arbeiten von GLEASON und von MONTGOMERY und ZIPPIN gelöst wurde.

Ich freue mich über die Einladung auch, weil ich mich dem Erlanger Institut durch kollegiale Verknüpfungen verbunden fühle. Einige von diesen mathematischen Verbindungen und Kooperationen kreisen in oftmals hintergründiger Weise immer wieder um Hilbert 5. So hoffe ich einerseits, durch die Wahl des Themas von allgemein Bekanntem nicht zu weit abseits zu liegen, und bei den Experten in diesem oder jenem Punkt auch fachliches Interesse anzusprechen. Und ein Letztes. Am 15. März 1992 verstarb DEANE MONTGOMERY, dessen Name auf immer mit Hilbert 5 verbunden bleibt [3], [15]. Ich habe das Glück gehabt, ihn seit der Mitte der sechziger Jahre zu kennen und durch ihn ein Jahr am Institute for Advanced Study verbringen zu dürfen. Das Thema ist so auch ein Anlaß, zweier großer Mathematiker zu gedenken, die Geometrie und Analysis aufs Profundeste zu verbinden wußten: OTTO HAUPT und DEANE MONTGOMERY.

Im Jahre 1826 erscheint im ersten Band des CRELLEschen Journals eine Arbeit von NIELS HENRIK ABEL unter dem Titel „*Untersuchung der Funktionen zweier unabhängig veränderlicher Größen x und y, wie $f(x,y)$, welche die Eigenschaft haben, daß $f(z,f(x,y))$ eine symmetrische Funktion von z, x und y ist*". Er beweist den folgenden Satz: *Hat eine Funktion die im Titel genannte Eigenschaft, so gibt es eine Funktion ψ derart, daß $\psi f(x,y) = \psi(x) + \psi(y)$ gilt.*

Nehmen wir einmal $S =]4,\infty[$; diese Menge ist zu $\mathbb{R}$ homömorph. Schreiben wir $a \wedge b = \min\{a,b\}$ und definieren wir $f\colon S\times S \to S$ durch $f(x,y) = \big((x\wedge 6)+y\big)\wedge 12$. Dann ist $z\wedge 6 > 4$ und $f(x,y) > 8$ für alle x, y und z aus S, und daher immer $f(z,f(x,y)) = 12$. Also ist f eine der abelschen Funktionen. Jedoch ist $f(5,7) = (5+7)\wedge 12 = 12$, aber $f(7,5) = (6+5)\wedge 12 = 11 \neq f(5,7)$. Also ist f ist sicher nicht kommutativ und kann daher nicht seine Schlußfolgerung erfüllen. An mangelnder Stetigkeit kann es nicht liegen, denn unser f ist stetig.

Nun schließt ABEL aus der Gleichung $f\big(z,f(x,y)\big) = f\big(z,f(y,x)\big)$ die

[1] Vortrag gehalten im 2. Otto Haupt-Kolloquium in Erlangen am 6. Juli 1993

Beziehung $f(x,y) = f(y,x)$, was—wie wir eben sahen—unzulässig ist. Aber akzeptieren wir einmal die Kommutativität von f als weitere Voraussetzung. Dann sind doch die von ABEL angesprochenen Funktionen $f: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ in unserer heutigen Sprechweise genau die kommutativen Halbgruppenmultiplikationen, und der ABELsche Satz würde, in dieser Sprechweise ausgedrückt, folgendermaßen lauten (wenn wir einmal die Funktion ψ als umkehrbar annehmen, was ABEL in seinem Beweis in der Tat auch voraussetzt, und wenn wir ferner wenigstens die Stetigkeit der Halbgruppenoperation f annehmen):

Satz von Abel. (Vorläufige Fassung) *Eine topologische abelsche Halbgruppe auf $\mathbb{R}$ ist isomorph zu der Gruppe $(\mathbb{R},+)$ oder einer ihrer offenen zusammenhängenden Unterhalbgruppen.*

In der Tat sind ja die zu $\mathbb{R}$ homöomorphen Teilräume von $\mathbb{R}$ gerade die offenen nichtleeren Intervalle. Also kommen außer $\mathbb{R}$ selbst die Intervalle $(]a,\infty[,+)$, $0 \leq a$ und deren Reflektionen am Ursprung in Frage.

Aber gemach: Die Operationen $f: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, die durch $f(x,y) = x \wedge y$, oder durch $f(x,y) = x \vee y = \max\{x,y\}$, oder durch $f(\mathbb{R} \times \mathbb{R}) = \{r\}$, $r \in \mathbb{R}$ definiert werden, sind kommutative topologische Halbgruppenmultiplikationen, und keine davon ist isomorph zu der von ABEL genannten.

Vielleicht sollte $f: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ differenzierbar sein? Denn in der Tat wird in ABEL's Beweis ungestört differenziert. Dann aber betrachten wir $f: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = xy$, eine sogar analytische Halbgruppenmultiplikation, die sich nicht den von ABEL genannten unterordnet, denn sie besitzt zwei idempotente Elemente, die im ABELschen Satz angesprochenen jedoch höchstens eines. Dieses Beipiel wird sogar von ABEL selbst angeführt: Er sagt, die Funktionalgleichung $\psi(xy) = \psi(x) + \psi(y)$ werde von $\psi(z) = a \log z$ gelöst.

Hier erkennt man auch eine der Grundschwierigkeiten bei den frühen Arbeiten zu diesem Gebiet: Fraglich ist nämlich der Begriff der Funktion selbst. Es ist da viel von *willkürlichen* Funktionen die Rede. Definitionsbereich und Wertevorrat werden nicht angegeben. Darauf konnte vielleicht im Cours d' Analyse von CAUCHY noch verzichtet werden. Aber die Frage nach Definitionsbereich und Wertevorrat ist von grundlegender Bedeutung, wenn man „willkürliche" oder „gesuchte" Funktionen in sich selbst einsetzt. Dieses Problem der präzisen Definition einer Funktion war noch immer, 60 Jahre später, ein Handicap bei SOPHUS LIEs „Transformationsgruppen"

$$x_j' = f_j(x_1, \ldots, x_n; a_1, \ldots, a_m)$$

und den geforderten Hintereinanderausführungen

$$\begin{aligned} &f_j\big(f_1(x_1, \ldots, x_n; a_1, \ldots, a_m), \ldots, \\ &\quad f_n(x_1, \ldots, x_n; a_1, \ldots, a_m); b_1, \ldots, b_m\big) = \\ &f_j(x_1, \ldots, x_n; c_1, \ldots, c_m). \end{aligned}$$

Wir kennen heute im großen und ganzen die topologischen Halbgruppenstrukturen auf $\mathbb{R}$: Es gibt sie in großer Vielfalt. (Vgl. [10], p. 206 ff.) Die meisten sind nicht kürzbar.

Auch ABEL hatte schon in dem allerersten Schluß seiner Beweisführung vorausgesetzt, daß $f(x,a) = f(x,b)$ allemal $a = b$ nach sich ziehe. Heute sagen wir, die Halbgruppenverknüpfung soll *kürzbar* sein. Wir können daher einmal den von ABEL in Crelle **1** im Jahr 1826 formulierten Satz nocheinaml etwas schärfer formulieren:

Satz von Abel. *Eine* kürzbare *topologische abelsche Halbgruppe auf* $\mathbb{R}$ *ist isomorph zu der Gruppe* $(\mathbb{R}, +)$ *oder einer ihrer offenen zusammenhängenden Unterhalbgruppen.*

Dies veranlaßt uns, das durch ABEL angeschnittene Problem in größerer Allgemeinheit wie folgt auszusprechen:

Das Abelsche Problem. *Bestimme alle (rechts und links) kürzbaren topologischen Halbgruppenstrukturen auf einer zusammenhängenden topologischen Mannigfaltigkeit.*

Die ABELschen Überlegungen haben wohl einen uns nicht mehr bewußten Einfluß ausgeübt, der bis heute anhält. Genau zur Jahrhundertwende entstand folgendes Postulat:

> **Hilbert 5, Teil 2.** Überhaupt werden wir auf das weite und nicht uninteressante Feld der Funktionalgleichungen geführt, die bisher meist nur unter Voraussetzung der Differenzierbarkeit der auftretenden Funktionen untersucht worden sind. Insbesondere die von ABEL mit so vielem Scharfsinn behandelten Funktionalgleichungen ... weisen an sich nicht auf, was zur Forderung der Differenzierbarkeit der auftretenden Funktionen zwingt ... In allen Fällen erhebt sich daher die Frage, *inwieweit etwa die Aussagen, die wir im Falle der Annahme differenzierbarer Funktionen machen können, unter geeigneten Modifikationen ohne diese Voraussetzung gültig sind.*

Diese Worte sprach kein Geringerer als DAVID HILBERT aus dem Anlaß des Internationalen Mathematikerkongresses in Paris im Jahr 1900, wo er seine berühmt gewordenen 23 Probleme vortrug. Dieser Vortrag war einerseits eine Standortbestimmung der zeitgenössischen Mathematik, also der Leistungen des 19. Jahrhunderts, und gleichzeitig die Proklamation eines Programms für die Mathematik des 20. Jahrhunderts in vielen Facetten. Den Einfluß dieser Rede für die Entwicklung der Mathematik im 20. Jahrhundert kann man gar nicht überschätzen. Das Zitat über die abelschen Funktionalgleichungen gehört zu dem berühmten 5. Hilbertschen Problem, aber dieser hier im Auszug zitierte Teil ist sehr viel weniger bekannt als der erste Teil.

> **Hilbert 5, Teil 1.** LIE hat bekanntlich mit Hinzuziehung des Begriffs der kontinuierlichen Transformationsgruppe ein System von Axiomen für die Geometrie aufgestellt und auf Grund seiner Theorie der Transformationsgruppen bewiesen, daß dieses System von Axiomen zum Aufbau der Geometrie hinreicht. Da LIE jedoch bei Begründung seiner Theorie stets annimmt, daß die die Gruppe definierenden Funktionen *differenziert* werden können, so bleibt in den LIEschen Entwicklungen unerörtert, ob die An-

> nahme der Differenzierbarkeit bei der Frage nach den Axiomen der Geometrie tatsächlich unvermeidlich ist oder nicht vielmehr als eine Folge des Gruppenbegriffes und der übrigen geometrischen Axiome erscheint. Diese Überlegungen ... legen uns die allgemeine Frage nahe *inwieweit der* LIE*sche Begriff der kontinuierlichen Transformationsgruppe auch ohne Annahme der Differenzierbarkeit der Funktionen unserer Untersuchung zugänglich ist.*

Eine [reelle] LIE*gruppe* ist in heutiger Sprechweise eine Gruppe auf einer [reell] analytischen Mannigfaltigkeit, deren Gruppenoperationen [reell] analytisch sind. Die Klassifikation der LIEschen Gruppen war zur Zeit der Proklamation der HILBERTschen Probleme schon auf dem besten Wege. LIE selbst, aber auch ENGEL und KILLING hatten erkannt, daß es sich vornehmlich um ein Problem der linearen Algebra handelte. Eine globale Erfassung der Gruppen wurde durch POINCARÈ, ELIE CARTAN und HERMANN WEYL erledigt.

Der erste Teil des HILBERTschen Problems ist ein Problem über Transformationsgruppen. Spezialisiert man es auf die Wirkung einer Gruppe auf sich durch Translation, dann kann man es als Frage auch so formulieren: *Ist jede topologische Gruppe auf einer topologischen Mannigfaltigkeit eine* LIE*gruppe?* Im Hinblick auf die (spätere) Klassifizierbarkeit der zusammenhängenden Liegruppen ist es uns erlaubt, HILBERT's kühnen Zugriff auf die Problematik so zu formulieren:

Das 5. Hilbertsche Problem für Gruppen, allgemeine Fassung. *Bestimme alle topologischen Gruppenstrukturen auf einer zusammenhängenden topologischen Mannigfaltigkeit.*

In dieser Formulierung ist unsere Version des ABELschen Problems sogar weiter gefaßt als diese.

HILBERT's weiterführende Formulierung geben den Schlüssel zu beiden Problemen:

Das 5. Hilbertsche Problem. *Untersuche die Umstände, unter denen die Lösung von Funktionalgleichungen auf topologischen Mannigfaltigkeiten automatisch differenzierbar oder gar analytisch sein müssen.*

Ich glaube, daß zum Zeitpunkt der Formulierung von HILBERTs Problemen der Unterschied zwischen einer topologischen und einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit hinreichend präzise verstanden war. Die WEIERSTRASSschen Funktionen waren bekannt. Daß die KOCHsche Schneeflockenkurve der Einheitskreislinie topologisch äquivalent war wußte man seit 1906, und man konnte sich allein schon durch die geometrische Anschauung davon überzeugen, daß sie von der Ebene, in der sie lebt, keine differenzierbare Struktur erben konnte. Was man allerdings nur andeutungsweise ansprechen konnte, waren topologische Gruppen auf zusammenhängenden, aber nicht euklidischen topologischen Räumen. Man findet solche Andeutungen in der Formulierung von HILBERTs 5. Problem. Nachdem er den LIEschen Formalismus und seine Problemstellung erörtert, sagt er im Anschluß

Hilbert 5: „unendliche“ Gruppen. Auch für unendliche Gruppen ist, wie ich glaube, die Untersuchung der entsprechenden Frage von Interesse.

Dunkel bleibt was „unendlich" heißen soll. Es handelt sich zunächst informell natürlich nicht um die Mächtigkeit der Elemente der Gruppe, sondern um die Anzahl der „Parameter", mit denen die Gruppe beschrieben werden kann (also in der vorher wiedergegebenen LIEschen Formulierung um die $a_1, \ldots, a_n$). Wir würden eher von unendlich dimensionalen Gruppen sprechen. Aber dies öffnet natürlich ein bis zum heutigen Tage unübersehbares Feld, wenn man sich einmal vergegenwärtigt, daß z.B. die additiven Gruppen aller topologischen Vektorräume darunterfallen. Immerhin könnten wir aus heutiger Sicht einmal wenigstens die *lokal kompakten Räume* ohne Dimensionsbeschränkung ins Auge fassen und ein Problem formulieren, für das der Zeitpunkt um 1900 noch zu früh war, aber das in gewissem Sinne schon implizit in HILBERTs Formulierung enthalten ist:

Hilbert 5: „unendliche" Gruppen, moderne Interpretation. *Bestimme alle topologischen Gruppenstrukturen auf einem zusammenhängenden lokal kompakten topologischen Raum.*

In dieser Form ist das Problem dem 1. Teil des 5. Hilbertschen Problems übergeordnet. Es ist bei dieser Formulierung überhaupt nicht mehr zu erkennen, was das Problem überhaupt mit der Einführung analytischer Parameter zu tun haben soll und es ist eigentlich höchst verwunderlich, daß dies, wie sich heraussstellte, tatsächlich der Fall war.

An die frühen Arbeiten knüpfen sich die verschiedensten innermathematischen Kulturen. Selbstverständlich hat der erste Teil des 5. HILBERTschen Problems die Entwicklung der topologischen Gruppen, ihre Darstellungstheorie und und die Transformationsgruppentheorie jenseits der klassischen Gruppen eigentlich erst ins Leben gerufen, jedenfalls aber nachhaltig angetrieben. Die Arbeiten ABELs über Funktionalgleichungen werden reklamiert als Ursprung der allgemeinen Theorie der Funktionalgleichungen als deren heutiger Altmeister JANOŠ ACZÉL zu gelten hat. Von ihm gibt es in der Tat auch einen lesenswerten Übersichtsartikel [2] der allerdings gerade im Hinblick auf das oben formulierte ABELsche Problem nicht den letzten Stand repräsentiert.

Wir haben uns nun einen gewissen Überblick über die Problemlage am Ende des 19. Jahrhunderts erfaßt, die von HILBERT im fünften seiner Probleme visionär dargestellt wurde. Wir wenden uns nun einer (sicher nicht erschöpfenden) Beschreibung des gegenwärtigen Kenntnisstandes zu.

In der ersten Jahrhunderthälfte wurde durch HERMANN WEYL, JOHN VON NEUMANN die Theorie der kompakten Gruppen in den Grundzügen abgeschlossen. Wesentliches Hilfsmittel war hier die Existenz eines invarianten Wahrscheinlichkeitsmaßes auf einer kompakten Gruppe, und die wesentlichen Struktureinsichten kamen aus der Darstellungstheorie (oder harmonischen Analyse, wie man dafür im Bereich der topologischen Gruppen auch sagt). Der Umstand, daß man genügende viele irreduzible unitäre Darstellungen hatte, reichte, da diese alle endlich-dimensional sein müssen, um für eine kompakte Gruppe zu schließen:

1. *Es gibt beliebig kleine kompakte Normalteiler N von G derart, daß G/N eine Lie-Gruppe ist.*

D.h. man kann jede kompakte Gruppe G „durch Lie-Gruppen approximieren". Natürlich kann man diesen Sachverhalt auch mit einer geeigneten Hintergrundstheorie ausdrücken und sagen jede Gruppe sei ein (strenger) projektiver Limes von Lie-Gruppen. Für unsere Zwecke reicht diese Formulierung allemal aus. Man könnte nun vielleicht meinen, das 5. HILBERTsche Problem sei damit für kompakte Gruppen erledigt. Eine nähere Inspektion zeigt aber aber, das dies so noch nicht der Fall ist. Wenn man aber mit Hilfe der Strukturtheorie kompakter Lie-Gruppen in die Sache weiter eindringt, bekommt man die folgende erheblich Verschärfung des Satzes 1 für kompakte G:

2. *Zu jeder noch so kleinen offene Umgebung V des Neutralelements gibt es einen kompakten Normalteiler N und eine lokale Lie-Gruppe U in G, die mit N elementweise vertauschbar ist derart, daß die Abbildung $(n,u) \mapsto nu : N \times U \to NU \subseteq V$ ein Homömorphismus auf eine in V enthaltene Einsumgebung ist.*[2]

Der Satz **2** erlaubt sogleich eine Umformulierung, deren Methodik dem Bereich der Lie-Gruppentheorie zuzurechnen ist:

3. *Zu jeder noch so kleinen offene Umgebung V des Neutralelements gibt es einen kompakten Normalteiler $N \subseteq V$, eine zusammenhängende Lie-Gruppe L und einen injektiven stetigen Homomorphismus $f\colon L \to G$ derart, daß die Funktion $(n,x) \mapsto nf(x)\colon N \times L \to G$ ein stetiger offener Gruppenhomomorphismus mit diskretem Kern ist.*

Insbesondere sind G und $N \times L$ lokal isomorph.

Mit diesem Satz **3** ist das HILBERTsche Problem in der Tat rasch zu erledigen: Da eine topologische Gruppe, die zu einer LIEgruppe lokal isomorph ist selbst eine Lie grupp ist, dürfen wir nach Satz **3** annehmen, G sei von der Form $N \times L$ mit einer LIEgruppe L und einer kompakten Gruppe N die (wenn man sie mit $N \times \{1\}$ identifiziert) in einer kompakten euklidischen Kugelumgebung E des Neutralelements von $N \times L$ enthalten ist. Sei $: N \to E \to N \times L$ die natürliche Einbettung und $p\colon N \times L \to N$ die Projektion. Dann ist $pi\colon N \to N$ die identische Abbildung. Da diese in der Form $N \to E \to N \times L \to N$ faktorisiert, und die Kugel E kontrahierbar ist, ist die identische Selbstabbildung von N kontrahierbar. Also ist N kontrahierbar. Die einzige kompakte und zusammenziehbare Gruppe ist die einelementige. Also ist $G = L$ und damit eine LIEgruppe. Damit ist das 5. HILBERTsche Problem für kompakte Gruppen positiv beantwortet.

Eine zweite Klasse von Gruppen in denen das HILBERTsche Problem in den dreißiger Jahren gelöst war, ist die der abelschen Gruppen. Die Dualitätstheorie von PONTRYAGIN und VAN KAMPEN liefert das folgende Strukturtheorem:

4. *Eine lokal kompakte zusammenhängende abelsche Gruppe ist isomorph zu $K \times \mathbb{R}^n$ mit einer kompakten Gruppe K.*

Dadurch war das Problem der lokal euklidischen Gruppen hier auf die kompakten Gruppen zurückgeführt, für die die HILBERTsche Frage positiv entschieden war. Die kompakten abelschen Lie-Gruppen unter allen abelschen Lie-Gruppen sind genau diejenigen, deren Charaktergruppen endlich erzeugt sind.

[2] U heißt lokale Lie-Gruppe in G, wenn eine Lie-Gruppe L, eine Einsumgebung $U' \subseteq L$ und ein Homömorphismus $\phi\colon U' \to U$ existiert, der $f(xy)=f(x)f(y)$ für alle $x, y, xy \in U'$ erfüllt.

Dies war die Situation vor dem zweiten Weltkrieg. Selbst bei niedrig dimensionalen topologischen Mannigfaltigkeiten war nichts bekannt. Unter Kennern hieß es, daß MONTGOMERY viel Mühe auf die Dimensionen 2 und 3 verwandt haben soll und diese Spezialfälle auch schließlich erledigte. Man wußte nicht einmal, ob eine lokal kompakte zusammenhängende Gruppe einen topologischen Bogen enthalten mußte. Daß man dies für gewisse lokalkompakte Gruppen beweisen konnte, erkannte A.M.GLEASON. Als MONTGOMERY davon hörte, erkannte er die Bedeutung für die Lösung des Problems. Seine mit LEO ZIPPIN gemeinsam verfaßte Arbeit ging bei den Annals of Mathematics am 28. März 1952, GLEASONs Arbeit am 13. Juni 1952 ein. G.D.MOSTOW hat neulich in einem Vortrag [15] daraus aufmerksam gemacht, daß GLEASONs „bemerkenswerte Idee" auf der Konstruktion einer Halbgruppe von kompakten Teilmengen beruhte. GLEASON selbst hat zu verstehen gegeben, daß ihm diese Idee kam, als er EINAR HILLEs Buch "Semi-groups of Operators on Hilbert space" las. MOSTOW nannte dies Zusammentreffen "a wonderful instance of unpredictable pregnancies in mathematics". Damit war HILBERTs 5. Problem, insoweit es lokal euklidische Gruppen betraf, im Jahr 1952 positiv entschieden. Der Beweis wurde von MONTGOMERY und ZIPPIN in einem zu einem Klassiker gewordenen und 1955 erschienen Lehrbuch dargestellt. Die große technische Komplikation des Beweises konnte bis heute nicht wesentlich verbessert werden, obgleich ab und zu Versuche unternommen werden.

Der größere Rahmen des HILBERTschen Problems über die Struktur der zusammenhängenden lokal kompakten Gruppen ist damit nicht abgeschlossen. Diese Frage wurde von dem früh verstorbenen HIDEHIKO YAMABE erledigt, der den Satz **1** für lokalkompakte (fast) zusammenhängende lokalkompakte Gruppen bewies. (Eine topologische Gruppe G wird fast zusammenhängend genannt, wenn G/G_0 kompakt ist.)

Diese Information kam gerade recht, um die Struktur lokalkompakter zusammenhängender Gruppen weitgehend zu erhellen. Denn schon im Jahre 1949 war in den Annals of Mathematics eine ganz bedeutende Arbeit von IWASAWA erschienen, in der grundlegende Eigenschaften derjenigen lokal kompakten Gruppen aufgedeckt wurden, die sich durch zusammenhängende Lie-Gruppen approximieren ließen. So wurde etwa der Satz **2** für diese Gruppen gezeigt. Damit stehen die Sätze **2** und **3** für fast zusammenhängende lokal kompakte Gruppen zur Verfügung. In dieser Arbeit wurde auch der folgende bedeutende Satz bewiesen, den man nach YAMABE's Resultat folgendermaßen aussprechen kann.

5. *In einer lokal kompakten fast zusammenhängenden Gruppe G ist jede kompakte Untergruppe in einer maximalen kompakte Untergruppe K enthalten (zu der alle anderen maximalen kompakten Untergruppen konjugiert sind), und es gibt Einparametergruppen $f_1, \dots f_n \colon \mathbb{R} \to G$ derart, daß die Abbildung*

$$\big(k, (x_1, \dots, x_n)\big) \mapsto k f_1(x_1) \cdots f(x_n) \colon K \times \mathbb{R}^n \to G$$

ein Homömorphismus ist.

Insbesondere ist G zu $K \times \mathbb{R}^n$ homömorph.

Die Bedeutung des IWASAWAschen Satzes beruht darin, daß jedenfalls alle topologischen Strukturmerkmale einer lokalkompakten zusammenhängenden

Gruppe bekannt sind, da man die Struktur der kompakten zusammenhängenden Gruppen seit langem sehr gut kennt.

Es war vor allem die auf die Struktur der lokalkompakten Gruppen gerichtete und bei der Erledigung des HILBERTschen Problems herauskommende Information, die in der Folgezeit in der Gruppentheorie fruchtbar wurde. Seit den 60er Jahren wurde mit diesen Informationen viel über die Struktur lokal kompakter Gruppen erforscht. Schon HILBERT hatte im Zusammenhang mit dem Problem der Lie-Gruppen von den Grundlagen der Geometrie gesprochen. Die Strukturtheorie der lokalkompakten Gruppen und ihrer Transfomationsgruppentheorie spielen eine zentralle Rolle in der gegenwärtigen Theorie der Grundlagen der Geometrie, in denen sich ein gewisser Abschluß abzuzeichnen beginnt; jedenfalls ist das Stadium erreicht, in dem zusammenfassende Monographien entstehen, in die die Strukturtheorie lokal kompakter Gruppen wesentlich einzugehen scheint [7].

Wie steht es indessen mit dem ABELschen Problem, das dem HILBERTschen übergeordnet war?

Im Zuge der Arbeiten am 5. HILBERTschen Problem erschien im Jahr 1957 in den Annals of Mathematics eine Arbeit von R. JACOBY on "Some theorems on the structure of locally compact local groups".[13] Unter anderem wurde darin gezeigt, daß eine lokal euklidische lokale topologischen Gruppe eine lokale Lie-Gruppe ist. Dieses nicht leicht zu zeigende Ergebnis geriet etwas in Vergessenheit, bis in der Mitte der siebziger Jahre unter der Aufsicht von DENNISON R. BROWN an der University of Houston eine Dissertation von R.S.HOUSTON verfaßt wurde, die sich der kürzbare topologische Halbgruppen auf Mannigfaltigketen annahm und durch geeignete aus der Halbgruppentheorie bekannte Techniken, die letztlich mit der sogenannten Ore-Bedingung zu tun haben, und mit Hilfe des JACOBYschen Resultates für jede solche Halbgruppe eine Lie-Gruppe konstruierte, in die sich Quotienten von Elementen aus der Halbgruppe lokal einbetten ließen. Eine systematische Klärung des Sachverhaltes gelang WOLFGANG WEISS und mir 1988. Wir zeigten mit Hilfe der Ergebnisse von BROWN und HOUSTON und einigen neuen Ideen den folgenden Satz:

6. (Hofmann und Weiss) *Es sei S eine kürzbare topologische Halbgruppe auf einer topologischen Mannigfaltigkeit. Dann gelten die folgenden Aussagen:*

(1) *Auf S existiert eine eindeutige analytische Struktur, bezüglich welcher die Multiplikation $S \times S \to S$ analytisch ist.*

(2) *Es gibt eine kanonisch bestimmte einfach zusammenhängende Lie-Gruppe $\widetilde{G}(S)$ und eine analytische kürzbare Halbgruppe $\widetilde{S}$ mit einem analytischen Überlagerungshomomorphismus $p: \widetilde{S} \to S$ und einem analytischen Homomorphismus $f: \widetilde{S} \to \widetilde{G}(S)$, welcher in allen Punkten ein lokaler Isomorphismus analytischer Mannigfaltigkeiten ist.*

(3) *Es gibt in $\widetilde{G}(S)$ eine zentrale abzählbare Untergruppe G_S, die zur Gruppe der Decktransformationen der Überlagerung $p: \widetilde{S} \to S$ algebraisch isomorph ist. Setzt man $G(S) = \widetilde{G}(S)/G_S$, so ist in dem kommutativen*

Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \widetilde{S} & \xrightarrow{\quad f \quad} & \widetilde{G}(S) \\ {\scriptstyle p}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle \mathrm{quot}} \\ S & \longrightarrow & G(S) \end{array}$$

die Abbildung $S \to G(S)$ der universelle Homomorphismus in eine topologischen Gruppe.

Es ist immer noch ein offenes Problem, ob G_S immer abgeschlossen (und dann wegen der abzählbaren Kardinalität diskret) sein muß. Dies ist von Interesse, weil nämlich dann und nur dann $G(S)$ eine Lie-Gruppe ist. Aber abgesehen davon ist damit zunächst einmal das ABELsche Problem jedenfalls insoweit positiv entschieden, also die angesprochenen Halbgruppen immer analytisch sind und mit einer Lie-Gruppe eng verbunden sind.

Nach dem vorigen Satz steht allemal soviel fest: ABEL hatte recht: Der Satz von ABEL trifft zu, wenn man die Forderung der Kürzbarkeit, die er implizit annimmt, explizit macht.

Die allgemeine Situation, die in dem Satz von HOFMANN und WEISS angesprochen wird, ist in mancherlei Hinsicht interessant. Wir illustrieren sie mit einem Beispiel.

Wir betrachten die Lie-Algebren $\mathfrak{g} = \mathrm{sl}(2,\mathbb{R}) \subseteq \mathrm{sl}(2,\mathbb{C}) = \mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$. In der Algebra $\mathfrak{g}$ setzen wir

$$[x,y,t] = x\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & y+t \\ y-t & -x \end{pmatrix}.$$

Die Determinante

$$L(x,y,t) \stackrel{\text{def}}{=} \det[x,y,t] = \begin{vmatrix} x & y+t \\ y-t & -x \end{vmatrix} = -x^2 - y^2 + t^2$$

ist eine unter inneren Automorphismen invariante Lorentzform auf $\mathfrak{g}$. Die Menge

$$W = \{[x,y,t] : L(x,y,z) \geq 0, \quad t \geq 0\}$$

ist ein unter inneren Automorphismen invarianter Lorentzkegel in $\mathfrak{g}$. In der 6-dimensionalen reellen Lie-Algebra $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ ist $\mathfrak{g} \oplus iW$ ein unter allen von $\mathfrak{g}$ erzeugten inneren Automorphismen invarianter Keil. Wir betrachten die Gruppen $G = \mathrm{Sl}(2,\mathbb{R}) \subseteq \mathrm{Sl}(2,\mathbb{C}) = G_{\mathbb{C}}$ der Dimensionen 3 bzw. 6. Zu der beschriebenen Situation gibt es einen Satz, von dem wir heute weitreichende Verallgemeinerungen kennen, der aber schon in dem vorliegenden Spezialfall nicht trivial ist:

Satz. (G.I.Ol'shanskiĭ) *Die Teilmenge $H = G\exp(i{\cdot}W)$ ist eine abgeschlossene Unterhalbgruppe mit einem nichtleeren Inneren S (welches $SH = HS \subseteq S$ erfüllt).*

Die Abbildung $(g,X) \mapsto g\exp(i{\cdot}X) : G \times W \to S$ ist ein Diffeomorphismus welcher auf $G \times \mathrm{interior}(W)$ einen Isomorphismus analytischer Mannigfaltigkeiten auf S induziert. ∎

Die Gruppe $\mathrm{Sl}(2,\mathbb{C})$ wirkt auf der Riemannschen Zahlenkugel $\mathbb{S}^2 = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ durch die Festsetzung:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot z = \frac{az+b}{cz+d}$$

Sei N die nördliche Hemisphäre von $\mathbb{S}^2$. Wir schreiben $A \subset B$ für $(A \subseteq B)$ und $(A \neq B)$. Dann ist

$$H = \{g \in \mathrm{Sl}(2,\mathbb{C}) : g{\cdot}N \subseteq N\}, \quad \text{und} \quad S = \{g \in \mathrm{Sl}(2,\mathbb{C}) : g{\cdot}N \subseteq \mathrm{Int}\, N\}.$$

Die Gruppe $G = \mathrm{Sl}(2,\mathbb{R})$ ist homömorph zu $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{S}^1$ und hat die Fundamentalgruppe $\mathbb{Z}$. Der Lorentzkegel W ist homömorph zu einem abgeschlossenen Halbraum $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^+ = [0,\infty[$. Nach dem Satz ist S homömorph zu $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^+$ und S zu $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}^5$. Es gibt also ein einfach zusammenhängendes Überlagerungsmonoid $\widetilde{H}$ von H das zu $\mathbb{R}^5 \times \mathbb{R}^+$ homömorph ist. Das Innere T von $\widetilde{H}$ ist die einfach zusammenhängende Überlagerungshalbgruppe von S, welche kürzbar und zu $\mathbb{R}^6$ homömorph ist. Die Gruppe $\mathrm{Sl}(2,\mathbb{C})$ ist homömorph zu $\mathrm{SU}(2) \times \mathbb{R}^3 \sim \mathbb{S}^3 \times \mathbb{R}^3$ und ist daher einfach zusammenhängend. Auf T ist der Satz **6** anwendbar. Die kanonisch zugeordnete einfach zusammenhängende Lie-Gruppe $\widetilde{G}(\widetilde{S})$ ist $\mathrm{Sl}(2,\mathbb{C})$ und die in Satz **6**(3) genannte Überlagerung $p\colon \widetilde{T} \to T$ ist die identische Abbildung von T. Wir haben in der Tat einen Homomorphismus $\widetilde{T} = T \to S \to \mathrm{Sl}(2,\mathbb{C})$, welcher ein lokaler Homöomorphismus und sogar eine Überlagerung auf das Bild S ist. Man kann nun zeigen [8], daß keine der Halbgruppe $\widetilde{H}$ und T auch nur algebraisch in irgendeine Gruppe eingebettet werden kann, geschweige den analytisch in eine Lie-Gruppe.

Halbgruppen der Art $G\exp(iW)$ treten auf, wenn man sich die Frage stellt, ob sich unitäre Darstellungen—wie in unserem Falle die von $\widetilde{G}$, der universellen Überlagerung von $\mathrm{Sl}(2,\mathbb{R})$—„holomorph fortsetzen lassen“. Diese Frage ist für die Darstellungstheorie von großer Bedeutung [17]. Das ABEL-HILBERTsche Problem hat uns zu analytischen Halbgruppen geführt, die zeigen, daß die konsequente Fortführung des im 5. HILBERTschen Problem formulierten Programms in seiner allgemeinen und konsequenten Durchführung den Rahmen der Gruppentheorie sprengt und Auswirkungen auf die aktuelle Forschung im Bereich der Darstellungstheorie der Gruppen hat [9, 17].

References

[1] Abel, N. H., *Untersuchung der Funktionen zweier unabhängig veränderlicher Größen x und y, wie $f(x,y)$, welche die Eigenschaft haben, daß $f(z,f(x,y))$ eine symmetrische Funktion von z, x und y ist*, J. reine angew. Mathem. **1** (1826), 11–15.

[2] Aczél, J., *The State of the second part of Hilbert's Fifth Problem*, Bull. Amer. Math. Soc. **20** (1989), 153–163.

[3] Borel, A., *Deane Montgomery 1909–1992*, Notices, Amer. Math. Soc. **39** No 7, September 1992.

[4] Brown, D. R. and R. S. Houston, *Cancellative semigroups on manifolds*, Semigroup Forum **35** (1987), 279–302.

[5] Comfort, W. W., K. H. Hofmann, and D. Remus, "Topological groups and semigroups", in: M. Hušek and J. van Mill, Eds., Recent Progress in General Topology, Elsevier, 1992, 57–144.

[6] Gleason, A. M., *Groups without small subgroups*, Ann. of Math. **56** (1952), 193–212.

[7] Grundhöfer, T., H. Salzmann, and M. Stroppel, "Compact Projective Planes," in preparation.

[8] Hilgert, J., K. H. Hofmann, and J. D. Lawson, "Lie Groups, Convex Cones, and Semigroups", Oxford University Press, 1989.

[9] Hilgert, J., and K.-H. Neeb, " Lie Semigroups and their applications" Springer Lecture Notes in Mathematics **1552**, 1993.

[10] Hofmann, K. H., and P. S. Mostert, "Elements of Compact Semigroups", Charles E. Merrill Books, Columbus (Ohio), 1966.

[11] Hofmann, K. H., and W. Weiss, *More on cancellative semigroups on manifolds*, Semigroup Forum **37** (1988), 93–111.

[12] Iwasawa, K., *On some types of topological groups*, Ann. of Math. **50** (1949), 507–557.

[13] Jacoby, R. *Some theorems on the structure of locally compact local groups*, Ann. of Math. **50** (1957), 36–69.

[14] "Mathematical Developments Arising from Hilbert Problems", Proc. of Symposia in Pure Math. **XXXVIII**, Amer. Math. Soc. 1976, xii+628 pp..

[15] "Deane Montgomery 1909–1992", Collection of Addresses delivered at the Institute for Advanced Study on November 13, 1992, Inst. Adv. Study, Princeton, 1993, 28 pp..

[16] Montgomery, D. and L. Zippin, *Small subgroups of finite dimensional groups*, Ann. of Math. **56** (1952), 213–241.

[17] Neeb, K.-H., "Holomorphic Representation Theory and Coadjoint Orbits of Convexity Type," Habilitationsschrift Technische Hochschule Darmstadt, 1993.

[18] Skljarenko, E. G., *Zum 5. Hilbertschen Problem*, In: H. Wußing, Herausg., Ostwalds Klassiker der exakten Wiss. **252**, Akad. Verl. Gesellsch. Leipzig, 1987, 21–24.

[19] Yamabe. H., *On the conjecture of Iwasawa and Gleason*, Ann. of Math, **58** (1953) 48–54.

[20] —, *Generalization of a theorem of Gleason*, Ann. of Math, **58** (1953) 351–365.

Fachbereich Mathematik
TH Darmstadt
Schloßgartenstr. 7
D-64289 Darmstadt
hofmann@mathematik.th-darmstadt.de

Received 30. Juni 1993