Seminar Sophus Lie
**3** (1993) 137–145 

# Ricci-Krümmungen linksinvarianter Metriken auf 4-dimensionalen nichtunimodularen Lie'schen Gruppen mit kommutativen Faktoren

**Valery Valentin Kaiser**

**Zusammenfassung**

Alle eventuellen Signaturen quadratischer Ricci-Form linksinvarianter Riemannscher Metriken auf 4-dimensionalen zusammenhängenden nicht unimodularen Lieschen Gruppen, die selbst gerade Produkte Liescher Gruppen sind, von denen eine kommutativ ist, werden untersucht.

## 1. Formulierungen der Ergebnisse

J. Milnor [1] hat bewiesen, daß 3-dimensionale Liesche Gruppen keine linksinvarianten Riemannschen Metriken mit folgenden Signaturen quadratischer Ricci-Form besitzen:

$$(+,+,0), \quad (+,-,0) \quad \text{und} \quad (+,+,-).$$

Er hat auch die Frage der Existenz beliebiger ähnlicher Beschränkungen für höhere Dimensionen gestellt. Im Artikel [2] wird diese Frage für 2-stufig auflösbare unimodulare [1] Liesche Gruppen untersucht. Aus den im Artikel [2] bewiesenen Ergebnissen folgt, daß 4-dimensionale 2-stufig auflösbare unimodulare Liesche Gruppen nur die linksinvarianten Metriken mit folgenden Signaturen der Ricci-Form besitzen:

$$\begin{matrix} (-,-,-,+), & (-,-,+,+), & (-,-,0,+), \\ (-,-,0,0), & (-,0,0,0), & (0,0,0,0). \end{matrix}$$

In dieser Note werden alle eventuelle Signaturen der quadratischen Ricci-Form linksinvarianter Riemannscher Metriken auf 4-dimensionalen zusammenhängenden nichtunimodularen Lieschen Gruppen G, die selbst beliebige gerade Produkte Liescher Gruppen $H$ und $K$ sind, wobei $K$ kommutativ ist, untersucht (alle solche Gruppen sind 2-stufig auflösbar). Im Unterschied zum unimodularen Fall sind die letzten zwei obengenannten Signaturen nicht erreichbar (d.h. es existiert keine linksinvariante Metrik auf der Gruppe $G$ mit derartigen Signaturen der Ricci-Form). Jedoch sind die übrigen vier Signaturen erreichbar. Dazu gibt es nur noch eine Möglichkeit für die Auswahl der Signatur $(-,-,-,0)$, die auch realisierbar ist, wie das folgende Theorem zeigt.

**Theorem 1.1.** *Jede linksinvariante Riemannsche Metrik auf einem 4-dimensionalen zusammenhängenden nicht unimodularen Produkt Liescher Gruppen $H$*

*und $K$ mit einem kommutativen Faktor $K$ besitzt nur folgende Signaturen quadratischer Ricci-Form:*

$$(-,-,-,+), \quad (-,-,+,+), \quad (-,-,0,+), \quad (-,-,0,0), \quad \textit{und} \quad (-,-,-,0).$$

*Für jede diese Signaturen existiert eine der obengenannten Lieschen Gruppen, die eine linksinvariante Riemannsche Metrik mit vorgegebener Signatur der Ricci-Form besitzt.*

Weil die betrachteten Gruppen $G = H \times K$ nichtunimodular und 4-dimensional sind, ist es für den Beweis des Theorems ausreichend, die folgende zwei unterschiedlichen Fälle zu untersuchen:

1. $\dim H = 3$, $\dim K = 1$, $H$ ist eine beliebige nicht unimodulare Liesche Gruppe, $K$ ist einer der Gruppen $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{S}^1$ isomorph,

2. $\dim H = \dim K = 2$, $H$ ist nicht kommutativ und $K$ ist kommutativ, (dann ist die Gruppe $H$ der Gruppe der affinen Transformationen der Geraden $\mathbb{R}$ lokal isomorph, und die Gruppe $K$ ist einer der Gruppen $\mathbb{R}^2$ oder $\mathbb{T}^2$ isomorph).

Nach dieser Bemerkung folgt der Beweis des Theorems aus folgenden zwei Sätzen.

**Satz 1.2.** *Sei $H$ eine 3-dimensionale zusammenhängende nicht unimodulare Liesche Gruppe und seien $K = \mathbb{R}$ oder $K = \mathbb{S}^1$, dann kann die quadratische Ricci-Form einer beliebigen linksinvarianten Metrik auf der Gruppe $G = H \times K$ nur eine der folgenden Signaturen haben:*

$$(-,-,-,+), \quad (-,-,+,+), \quad (-,-,0,+), \quad (-,-,0,0), \quad (-,-,-,0).$$

*Alle diese Signaturen sind erreichbar.*

**Satz 1.3.** *Es sei $G = H \times K$ ein gerades Produkt zusammenhängender Liescher Gruppen $H$ und $K$, wobei $\dim H = \dim K = 2$, $K$ kommutativ und $H$ nichtkommutativ seien. Eine beliebige linksinvariante Metrik auf der Gruppe $G$ kann nur zwei mögliche (und erreichbare) Signaturen $(-,-,0,0)$ und $(-,-,+,0)$ der Ricci-Form haben.*

**Bemerkung 1.4.** Aus den Sätzen 1-2 folgt, daß es auf geraden Produkten $G = H \times K$ mit einem kommutativen Faktor $K$ nicht viele Möglichkeiten für die Auswahl der Signaturen der Ricci-Form linksinvarianter Metriken gibt, die sich von den Signaturen des geraden Produktes der linksinvarianten Metriken auf den Gruppen $H$ und $K$ unterscheiden. Es gibt mehr solche Möglichkeiten, falls die Dimension des kommutativen Faktors $K$ kleiner ist.

Das folgt aus der unten aufgeführten Tabelle, deren Inhalt der Spalten 5. und 6. einige Ergebnisse des Artikels [1] vorstellt.

| Dimensionen | | Eventuelle Ricci-Form-Signaturen linksinvarianter Metriken | | Ricci-Form-Signaturen gerader Produkte linksinvarianter Metriken | Ricci-Form-Signaturen anderer linksinvarianter Metriken |
|---|---|---|---|---|---|
| $H$ | $K$ | auf $H$ | *auf* $K$ | auf $G \times K$ | |
| 3 | 1 | $(+,-,0)$<br>$(-,-,0)$<br>$(-,-,-)$ | 0 | $(+,-,-,0)$<br>$(-,-,0,0)$<br>$(-,-,-,0)$ | $(-,-,-,+)$<br>$(-,-,+,+)$ |
| 2 | 2 | $(-,-)$ | $(0,0)$ | $(-,-,0,0)$ | $(-,-,0,+)$ |

## 2. Berechnungen

Hier werden die Sätze 1–3 bewiesen. Wie dies oben bemerkt ist, wird das auch das Theorem beweisen.

**Lemma 2.1.** *Es sei $G$ eine $n$-dimensionale Liesche Gruppe mit einer Liescher Algebra $\mathfrak{g}$, und $\mathfrak{b}$ sei ein kommutatives Ideal der Algebra $\mathfrak{g}$ der Kodimension 1. Auch sei $\mathbf{a}$ ein Einheitsvektor, der zur Hyperebene $\mathfrak{b}$ in bezug auf das von einer auf der Gruppe $G$ gegebene linksinvariante Metrik $g$ auf dem Ideal $\mathfrak{b}$ induziertes Skalarprodukt orthogonal ist, und $L$ sei die Beschränkung auf $\mathfrak{b}$ der Abbildung $ad : \mathbf{x} \longmapsto [\mathbf{a}, \mathbf{x}]$. Wenn $L^*$ die in Bezug auf das auf $\mathfrak{b}$ induzierte Skalarprodukt für $L$ konjugierte lineare Abbildung ist, und $S = (L + L^*)/2$, $T = (L - L^*)/2$ selbstkonjugiertes und schiefkonjugiertes Teil für $L$ sind, dann gelten folgende Gleichungen für den Krümmungstensor $R$ der Metrtik $g$:*

$$
\begin{aligned}
R_{\mathbf{ua}}\mathbf{u} &= \langle S(\mathbf{u}), (T + L)(\mathbf{u})\rangle \mathbf{a}, \\
R_{\mathbf{au}}\mathbf{a} &= (SL - TS)(\mathbf{u}), \\
R_{\mathbf{vu}}\mathbf{v} &= \langle S(\mathbf{v}, \mathbf{v})\rangle S(\mathbf{u}) - \langle S(\mathbf{u}, \mathbf{v})\rangle S(\mathbf{v})
\end{aligned}
$$

*für alle $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathfrak{b}$.*

**Beweis.** Laut Lemma 5.5 aus [1] gelten folgende Gleichungen für den Operator kovarianter Differentiation $\nabla$ der Metrik $g$:

$$\nabla_{\mathbf{a}}\mathbf{a} = 0, \quad \nabla_{\mathbf{a}}\mathbf{u} = T(\mathbf{u}), \quad \nabla_{\mathbf{u}}\mathbf{a} = -S(\mathbf{u}), \quad \nabla_{\mathbf{u}}\mathbf{v} = \bar{\nabla}_{\mathbf{u}}\mathbf{v} + \langle S(\mathbf{u}, \mathbf{v})\rangle \mathbf{a},$$

wobei der Operator $\bar{\nabla}$ kovarianter Differentiation in bezug auf die auf der Untergruppe $B \subset G$ mit Liescher Algebra $\mathfrak{b}$ induzierte Metrik infolge der Kommutativität der Untergruppe $B$ verschwindet. Für den Beweis des Lemmas ist jetzt nur die Formel $R_{XY}Z = (\nabla_X\nabla_Y - \nabla_Y\nabla_Z - \nabla_{[X,Y]})Z$ für die Berechnung des Krümmungstensors ( siehe [3] ) unter Berücksichtigung der Gleichungen des Lemmas 5.5 aus [1] anzuwenden. ∎

**Lemma 2.2.** *Mit den Bezeichnungen des vorigen Lemmas kann die Ricci-Transformation $\hat{r}$ der Metrik $g$ auf $G$ folgenderweise berechnet werden:*

$$\begin{aligned}\hat{r}(\mathbf{u}) &= -\left\{(\operatorname{trace}(S))\cdot S + \frac{1}{2}(LL^* - L^*L)\right\}(\mathbf{u}) \\ &\quad + \operatorname{trace}\left\{\operatorname{ad}_{S(\mathbf{u})} - S \quad \operatorname{ad}_{\mathbf{u}}\right\}\mathbf{a}, \quad \mathbf{u}\in\mathfrak{b}, \\ \hat{r}(\mathbf{a}) &= -\operatorname{trace}(S^2)\mathbf{a}.\end{aligned}$$

**Beweis.** Es sei $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_{n-1}$ eine orthonormierte Basis des Ideals $\mathfrak{b}$, die eine Basis Liescher Algebra $\mathfrak{g}$ zusammen mit dem Vektor $\mathbf{e}_n = \mathbf{a}$ bildet. Dann gilt (siehe [3] ) $\hat{r}(\mathbf{x}) = -\sum_{i=1}^{n} R_{\mathbf{e}_i\mathbf{x}}\mathbf{e}_i, \quad \mathbf{x}\in\mathfrak{g}$. Für $\mathbf{x} = \mathbf{u}\in\mathfrak{g}$ haben wir zufolge des Lemmas 5.5 aus [1]:

$$\begin{aligned}\hat{r}(\mathbf{u}) &= -\sum_{i=1}^{n-1} R_{\mathbf{e}_i\mathbf{u}}\mathbf{e}_i \\ &= -\sum_{i=1}^{n-1}\langle S(\mathbf{e}_i), \mathbf{e}_i\rangle S(\mathbf{u}) + \sum_{i=1}^{n-1}\langle S(\mathbf{u}), \mathbf{e}_i\rangle - (SL - TS)(\mathbf{u}) \\ &= -\operatorname{trace}(S)\cdot S(\mathbf{u}) + S^2(\mathbf{u}) + (TS - SL)(\mathbf{u}) \\ &= -\operatorname{trace}(S)\cdot S(\mathbf{u}) + (LS - SL)(\mathbf{u}),\end{aligned}$$

weil $\sum_{i=1}^{n}\langle S(\mathbf{u}), \mathbf{e}_i\rangle S(\mathbf{e}_i) = S(\sum_{i=1}^{n}\langle S(\mathbf{u}), \mathbf{e}_i\rangle\mathbf{e}_i) = S^2(\mathbf{u})$ und weil $S + T = L$. In ähnlicher Weise haben wir

$$\begin{aligned}\hat{r}(\mathbf{a}) &= -\sum_{i=1}^{n-1} R_{\mathbf{e}_i\mathbf{a}}\mathbf{e}_i = -\sum_{i=1}^{n-1}\langle S(\mathbf{e}_i), (T+L)(\mathbf{e}_i)\rangle\mathbf{a} \\ &= -\sum_{i=1}^{n-1}\langle S(\mathbf{e}_i), (S+2T)(\mathbf{e}_i)\rangle\mathbf{a} = -\sum_{i=1}^{n-1}\langle S(\mathbf{e}_i), S(\mathbf{e}_i)\rangle\mathbf{a} = -\operatorname{trace}(S^2)\mathbf{a},\end{aligned}$$

weil $\sum_{i=1}^{n-1}\langle S(\mathbf{e}_i), T(\mathbf{e}_i) = \operatorname{trace}(ST) = -\operatorname{trace}(TS) = 0$. ■

**Beweis des Satzes 1.1** Es sei $\mathfrak{h}$ die Liesche Algebra der Gruppe $H$. Wir bezeichnen $\mathfrak{b}_0$ den unimodularen Kern Liescher Algebra $\mathfrak{h}$, der ein 2-dimensionales kommutatives Ideal in $\mathfrak{h}$ ist, so daß $\mathfrak{b}_0 = \{\mathbf{x}\in\mathfrak{h}, \operatorname{trace}\operatorname{ad}_{\mathbf{x}} = 0\}$. Es sei $\{\mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2, \mathbf{E}_3, \mathbf{E}_4\}$ eine orthonormierte Basis Liescher Algebra $\mathfrak{g}$ der Gruppe $G = H\times K$ in bezug auf eine auf der Gruppe $G$ gegebene linksinvariante Metrik, so daß Vektoren $\mathbf{E}_1$ und $\mathbf{E}_2$ in $\mathfrak{b}_0$ liegen und Vektor $\mathbf{E}_3$ zu unimodularem Kern $\mathfrak{b}_0$ orthogonal ist. Dann ist der Vektor $\mathbf{E}_4$ zur Unteralgebra $\mathfrak{h}$ Liescher Algebra $\mathfrak{g}$ orthogonal. Vektor $\mathbf{b} = \sum_{i=1}^{4} b_i\mathbf{E}_i$ ziehe Liesche Algebra $\mathfrak{k}$ der Gruppe $K$. Da Liesche Algebra $\mathfrak{g}$ ein gerades Produkt $\mathfrak{h}\times\mathfrak{k}$ gleich ist, so gilt $b_4 \neq 0$. Die Matrix

$$A = \begin{pmatrix}\alpha & \gamma \\ \beta & \delta\end{pmatrix}$$

sei die Matrix der Einschränkung $L$ der Abbildung $\operatorname{ad}_{\mathbf{E}_3}$ auf das Ideal $\mathfrak{b}_0$ der Lieschen Algebra $\mathfrak{h}$. Dann gilt für die Lieschen Klammern der Vektoren der gewählten Basis

$$[\mathbf{E}_3, \mathbf{E}_1] = \alpha\mathbf{E}_1 + \beta\mathbf{E}_2, \qquad [\mathbf{E}_3, \mathbf{E}_2] = \gamma\mathbf{E}_1 + \delta\mathbf{E}_2, \qquad [\mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2] = 0, \qquad (1)$$

$$\begin{aligned}
[\mathbf{E}_4, \mathbf{E}_1] &= -\frac{b_3}{b_4}(\alpha\mathbf{E}_1 + \beta\mathbf{E}_2), \qquad [\mathbf{E}_4, \mathbf{E}_2] = -\frac{b_3}{b_4}(\gamma\mathbf{E}_1 + \delta\mathbf{E}_2),\\
[\mathbf{E}_4, \mathbf{E}_3] &= \frac{1}{b_4}\left\{(\alpha b_1 + \gamma b_2)\mathbf{E}_1 + (\beta b_1 + \delta b_2)\mathbf{E}_2\right\}, \qquad (2)
\end{aligned}$$

$$\alpha + \delta \neq 0 \qquad (3)$$

Und zwar stellen die Gleichungen (1) die Klammer-Operation der 3-dimensionalen nichtunimodularen Lieschen Algebra dar und sind in [1] bewiesen, wobei $\alpha + \delta = \operatorname{trace} \operatorname{ad}_{\mathbf{E}_3} \neq 0$, weil $\mathbf{E}_3 \notin \mathfrak{b}_0$. Die Formel (2) folgt aus den Gleichungen $[\mathbf{b}, \mathbf{E}_i] = 0 (i = 1, 2, 3)$, die bedeuten, daß $\mathfrak{h}$ und $\mathbf{Rb}$ Ideale der Liescher Algebra $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \times \mathfrak{k}$ sind. Wir schreiben $B^2 = b_3^2 + b_4^2$ und wählen eine neue Basis $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_4$ der Algebra $\mathfrak{g}$, so daß Vektor $\mathbf{e}_4$ zu unimodularem Kern $\mathfrak{b} = \mathfrak{b}_0 \times \mathfrak{k}$ Liescher Algebra $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \times \mathfrak{k}$ orthogonal ist und daß Vektor $\mathbf{e}_3$ in $\mathfrak{b}$ liegt und unimodularem Kern der Algebra $\mathfrak{h}$ orthogonal ist. Dann gilt

$$\mathbf{e}_1 = \mathbf{E}_1, \quad \mathbf{e}_2 = \mathbf{E}_2, \quad \mathbf{e}_3 = \frac{1}{B}(b_3\mathbf{E}_3 + b_4\mathbf{E}_4), \quad \mathbf{e}_4 = \frac{1}{B}(-b_4\mathbf{E}_3 + b_3\mathbf{E}_4).$$

Eine direkte Rechnung zeigt, daß folgende Ausdrücke für Liesche Klammer der Elemente ausgewählter Basis mit diesen Bezeichnungen gelten

$$\begin{aligned}
[\mathbf{e}_4, \mathbf{e}_1] &= -\frac{B}{b_4}(\alpha\mathbf{e}_1 + \beta\mathbf{e}_2), \qquad [\mathbf{e}_4, \mathbf{e}_2] = -\frac{B}{b_4}(\gamma\mathbf{e}_1 + \delta\mathbf{e}_2),\\
[\mathbf{e}_4, \mathbf{e}_3] &= \frac{1}{b_4}\left\{(\alpha b_1 + \gamma b_2)\mathbf{e}_1 + (\beta b_1 + \delta b_2)\mathbf{e}_2\right\}, \qquad (4)\\
[\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j] &= 0 \qquad (i, j = 1, 2, 3).
\end{aligned}$$

Jetzt verwenden wir das Lemma 2 zu unserem Fall der Algebra $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \times \mathfrak{k}$ mit kommutativem Ideal $\mathfrak{b} = \mathfrak{b}_0 \times \mathfrak{k}$ und mit $\mathbf{a} = \mathbf{e}_4 \perp \mathfrak{b}$. Die Verwendung des Lemmas 2 führt nach einigen Rechnungsumwandlungen zu folgenden Ausdrücken für Elemente der Matrix $R = (R_{ij})$ selbstkonjugierter Ricci-Transformation $\hat{r}(\mathbf{e}_i) = \sum_{j=1}^4 R_{ij}\mathbf{e}_j$, $(i, j = 1, 2, 3, 4)$:

$$\begin{aligned}
R_{11} &= \frac{1}{2b_4^2}(B^2 a_{11} + x^2), \qquad R_{12} = \frac{1}{2b_4^2}(-2B^2 a_{12} + xy),\\
R_{22} &= \frac{1}{2b_4^2}(B^2 a_{22} + y^2), \qquad R_{13} = \frac{B}{2b_4^2}((2\alpha + \delta)x + \beta y),\\
R_{33} &= -\frac{1}{2b_4^2}(x^2 + y^2), \qquad R_{23} = \frac{B}{2b_4^2}(\gamma x + (\alpha + 2\delta)y), \qquad (5)\\
R_{44} &= -\left\{\frac{1}{2}(x^2 + y^2) + B^2(\alpha^2 + \delta^2 + \frac{1}{2}(\beta + \gamma)^2)\right\},\\
R_{i4} &= R_{4i} = 0 \quad (i = 1, 2, 3),
\end{aligned}$$

wobei

$$\begin{aligned}
a_{11} &= \gamma^2 - \beta^2 - 2\alpha(\alpha + \delta),\\
a_{12} &= \alpha\gamma + \beta\delta,\\
a_{22} &= \beta^2 - \gamma^2 - 2\delta(\alpha + \delta),\\
x &= \alpha b_1 + \gamma b_2,\\
y &= \beta b_1 + \delta b_2.
\end{aligned}$$

Aus (3) folgt $R_{44} < 0$. Da der Vektor $\mathbf{e}_4$ ein Eigenvektor der Ricci-Transformation ist und entsprechende Ricci-Hauptkrümmung $R_{44}$ negativ ist, so hat die Signatur der Ricci-Transformation immer mindestens ein Minus.

Aus (5) ist es leicht zu schließen, daß wir für die charakteristische Gleichung $\det(\hat{r} - \lambda E) = 0$ der Ricci-Transformation $\hat{r}$ folgenden Ausdruck haben:

$$(\lambda - R_{44})(\lambda^3 + R_1\lambda^2 + R_2\lambda + R_3) = 0,$$

wo

$$\begin{aligned}
R_1 &= 2(\alpha+\delta)^2B^2 > 0,\\
R_2 &= \frac{1}{4b_4^2}\Big\{ - B^2[(a_{11}x^2 - 4a_{12}xy + a_{22}y^2)\\
&\quad +((2\alpha+\delta)x+\beta y)^2 + (\gamma x + (\alpha+2\delta)y)^2]\\
&\quad +B^4(a_{11}a_{22} - 4a_{12}^2) - (x^2+y^2)\Big\},\\
R_3 &= \frac{B^2}{8b_4^6}\Big\{(x^2+y^2)(a_{22}x^2 + 4a_{12}xy + a_{11}y^2)\\
&\quad + \Big(\gamma x^2 - \beta y^2 + (\delta-\alpha)xy\Big)^2\\
&\quad +B^2\Big(A_{11}x^2 + 2A_{12}xy + A_{22}y^2\Big)\Big\},
\end{aligned} \tag{6}$$

wobei

$$\begin{aligned}
A_{11} &= a_{11}a_{22} - 4a_{12}^2 + a_{11}\gamma^2 + 4a_{12}\gamma(2\alpha+\delta) + a_{22}(2\alpha+\delta),\\
A_{12} &= a_{11}\gamma(\alpha+2\delta) + a_{22}\beta(2\alpha+\delta) + 2a_{12}(\beta\gamma + (2\alpha+\delta)(\alpha+2\delta)),\\
A_{22} &= a_{11}a_{22} - 4a_{12}^2 + a_{11}(\alpha+2\delta) + 4a_{12}\beta(\alpha+2\delta) + a_{22}\beta^2.
\end{aligned} \tag{7}$$

Seien $\lambda_1$, $\lambda_2$, $\lambda_3$, $\lambda_4$ die Ricci-Hauptkrümmungen, dann gelten die Gleichungen $\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3 = -R_1$, $\lambda_1\lambda_2+\lambda_1\lambda_3+\lambda_2\lambda_3 = R_2$, $\lambda_1\lambda_2\lambda_3 = -R_3$, $\lambda_4 = R_{44} < 0$. Daraus folgt,daß die Signaturen

$$(0,0,0,-), \quad (0,0,+,-), \quad (0,+,+,-), \quad \text{und} \quad (+,+,+,-)$$

aus den zehn denkbaren Signaturen, die mindestens ein Minus erhalten, die Signaturen der Ricci-Form keiner linksinvarianten Metrik sein können. Dies gilt auch für die Signatur $(-,-,-,-)$, weil die Liesche Algebra $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \times \mathfrak{k}$ ein nichttriviales Zentrum hat und weil Ricci-Krümmungen in der Richtungen zentraler Elementen nicht negativ sind [1]. Das bedeutet, daß genau nur fünf Signaturen aus der Fassung des Satzes 1 möglich sind.

Jetzt brauchen wir nur noch aufzuzeigen, daß diese fünf Signaturen erreichbar sind. Dafür betrachten wir zuerst linksinvariante Metriken auf der Gruppe $G = H \times K$, die gerade Produkte linksinvarianter Metriken auf den Gruppen $H$ und $K$ sind. In diesem Fall sind Ideale $\mathfrak{h}$ und $\mathbb{R}\mathbf{b}$ orthogonal, so daß $\mathbf{b} = \mathbf{e}_4$. Deswegen gilt $b_1 = b_2 = b_3 = 0$, $b_4 = 1$, $\mathbf{e}_3 = \mathbf{E}_4$, $\mathbf{e}_4 = -\mathbf{E}_3$ und $\mathfrak{h} = \mathrm{Spann}(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$. Aus (5) folgt dann, daß $\hat{r}(\mathbf{e}_3) = 0$. Das bedeutet, daß die Ricci-Hauptkrümmung $\lambda_3$ verschwindet, für $\lambda_4$ haben wir wie früher $\lambda_4 < 0$. Die beiden anderen zwei $\lambda_1$ und $\lambda_2$ zusammen mit $\lambda_4 = 0$ sind die

Ricci-Hauptkrümmungen induzierter Metrik auf der Untergruppe $H$, weil $H$ in diesem Fall total geodätisch in $G$ ist. Wie im Artikel [1] bewiesen ist, gibt es für die Auswahl der Zeichen von $\lambda_1$ und $\lambda_2$ nur drei Möglichkeiten: $(+,-),(0,-)$ und $(-,-)$. Daraus folgt, daß die Signaturen $(*,-,-,0)$ (wo $*$, entweder $+$, oder $-$ oder $0$ bedeutet) die Signaturen der Ricci-Form der Produkte linksinvarianter Metriken auf den Untergruppen $H$ und $K$ sind.

Jetzt betrachten wir die sogenannte [1] spezielle 3-dimensionale nichtunimodulare Liesche Gruppe. Ihre Liesche Algebra $\mathfrak{h}$ besitzt eine solche Eigenschaft, daß jeder ihre lineare Unterraum eine Liesche Unteralgebra ist.

**Lemma 2.3.** *Jede linksinvariante Riemannsche Metrik auf dem Produkt $G = H \times K$ einer speziellen 3-dimensionalen nichtunimodularen Lieschen Gruppe $H$ und einer 1-dimensionalen Gruppe $K$ ($\mathbb{R}$ oder $\mathbb{S}^1$) hat entweder die Signatur $(-,-,-,+)$ oder die Signatur $(-,-,-,0)$ der Ricci-Form.*

**Beweis.** Aus [1] folgt, daß in speziellen Fall $\alpha = \delta$, $\beta = \gamma = 0$ gilt. Aus (7) folgt, daß

$$\begin{aligned} R_2 &= \left(\frac{\alpha^2}{2b_4}\right)^2 \left(16t^2 - 5st - s^2\right), \\ R_3 &= -\frac{1}{8}\left(\frac{\alpha}{b_4}\right)^6 st\,(5t+s) \leq 0, \end{aligned}$$

gilt, wobei $s = b_1^2 + b_2^2 \geq 0$ und $t = B^2 > 0$, weil $b_4 \neq 0$. Weiter werden wir die Cartesischen Zeichenregel verwenden, die behauptet, daß die Anzahl positiver Wurzeln eines Polynoms, das ein nichtverschwundenes variablenfreies Glied und nur reele Wurzeln hat, der Anzahl der Zeichenwechsel der Koeffizientenreihenfolge des Polynoms gleich ist. Unter Berücksichtigung der Ungleichung $\lambda_4 < 0$ können wir dann folgende Tabelle zusammenstellen:

| Signaturen der Ricci-Form | $(-,-,-,+)$ | $(-,-,+,+)$ | $(-,-,0,+)$ | $(-,-,0,0)$ | $(-,-,-,0)$ |
|---|---|---|---|---|---|
| Zeichen $R_2$ | $+,-,0$ | $-$ | $-$ | $0$ | $+$ |
| Zeichen $R_3$ | $-$ | $+$ | $0$ | $0$ | $0$ |

Wenn $s = 0$, dann gilt $R_3 = 0, R_2 > 0$, und wir haben die Signatur $(-,-,-,0)$. Wenn $s > 0$, dann $R_3 < 0$, und die Signatur $(-,-,-,+)$ ist vorhanden. ∎

Für den Beweis des Satzes 1 ist es jetzt ausreichend zu schließen, daß die Signatur $(+,+,-,-)$ erreichbar ist. Dafür müssen wir beweisen, daß eine 3-dimensionale nichtunimodulare Gruppe $H$ so existiert, daß die Gruppe $H \times \mathbb{R}$ (oder $H \times \mathbb{S}^1$) eine linksinvariante Metrik mit der Bedingung $R_3 > 0$ besitzt. Wir beweisen jetzt, daß nur die Gruppen mit nicht verschwundenem Milnor-Invariant

$D \neq 0$ [1] diese Eigenschaft besitzen. Dazu ist es notwendig daran zu erinnern [1], daß jede nicht spezielle 3-dimensionale Liesche Gruppe $H$ bis auf einen lokalen Isomorphismus mit dem Wert der Invarianten

$$D = \frac{4}{(\alpha+\delta)^2}(\alpha\delta - \beta\gamma) \tag{8}$$

völlig definiert wird. Aus (7) folgt, daß das Vorzeichen von $R_3$ und das Vorzeichen des Ausdrucks $(x^2+y^2)\phi(x,y) + (\gamma x^2 - \beta y^2 + (\delta-\alpha)xy)^2$ für hinreichend kleine Werte von $B^2 = b_3^2 + b_4^2$ gleich sein sollen, wobei $\phi(x,y) = a_{22}x^2 + 4a_{12}xy + a_{11}y^2$. Daraus folgt, daß $R_3 > 0$ gilt, wenn $\phi(x,y) > 0$ und wenn die Werte von $b_3$ und $b_4$ hinreichend klein sind. Berechnungen des Artikels [1] zeigen, daß die Beschränkung auf den unimodularen Kern $\mathfrak{b}_0$ Liescher Algebra $\mathfrak{h}$ der Ricci-Transformation $\hat{r}$ induzierter linksinvarianter Metrik auf $H$ in der Basis $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ die Matrix

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2}a_{11} & -a_{12} \\ -a_{12} & \frac{1}{2}a_{22} \end{pmatrix}$$

hat. Aus [1] folgt, daß für $D \neq 0$ eine linksinvariante Metrik mit der Signatur $(-,+)$ für Eigenwerte dieser Matrix existiert. Für beliebige Metrik, die eine solche ist, ist die quadratische Form $\phi(x,y)$ nicht ausgeartet und nicht definiert, so daß reele Zahlen $s,t$ mit der Eigenschaft $\phi(s,t) > 0$ existieren. Aus (6) folgt dann, daß reele Zahlen $b_1$ und $b_2$ existieren, so daß $s = \alpha b_1 + \gamma b_2, t = \beta b_1 + \delta b_2$ gilt. Nach der Auswahl dieser Werte $b_1$ und $b_2$ und hinreichend kleiner Werte von $b_3$ und $b_4$ bekommen wir eine linksinvariante Metrik auf der Gruppe $G$ mit der Eigenschaft $R_3 > 0$. Damit endet der Beweis des Satzes 1. ∎

**Beweis des Satzes 2.** Es ist leicht zu beweisen, daß eine 3-dimensionale nicht-unimodulare Liesche Gruppe $H$ mit dem Milnor-Invariant $D = 0$ einem Produkt $\widetilde{H} \times \mathbb{R}$ lokal isomorph ist, wobei $\widetilde{H}$ eine 2-dimensionale nichkommutative Liesche Gruppe ist. Dann ist die Gruppe $G = H \times K$ einem Produkt $\widetilde{H} \times \widetilde{K}$ zweidimensionalen nichtkommutativer und kommutativer Gruppen $\widetilde{H}$ und $\widetilde{K}$ lokal isomorph. Wir beweisen, daß $R_3 = 0$ und $R_2 \leq 0$ für $D = 0$ gilt. Der Satz 2 wird dann aus der Betrachtung der Tabelle des Lemmas 3 folgen.

Mit Hilfe der speziellen Auswahl einer Basis $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ des unimodularen Kernes $\mathfrak{b}_0 \subset \mathfrak{h}$ können wir dazu gelangen, daß $\delta = \alpha$ gilt (siehe [4]). Aus (8) und aus der Gleichung $D = 0$ folgt dann $\beta\gamma = \alpha^2$ und aus (3) folgt $\beta\gamma \neq 0$. Wir bezeichnen folgenderweise drei Ausdrücke, die in den geschweiften Klammern der Formel für die Berechnung $R_3$ in (7) auftreten:

$$\begin{aligned} \Phi &= a_{22}x^2 + 4a_{12}xy + a_{11}y^2, \\ \Psi &= A_{11}x^2 + 2A_{12}xy + A_{22}y^2, \\ \Theta &= \gamma x^2 + (\delta - \alpha)xy - \beta y^2, \end{aligned}$$

wobei die Werte von $x, y, a_{ij}, A_{ij} (i,j = 1,2)$ in (6) und (8) definiert sind.

Eine direkte Rechnung zeigt, daß $x^2 + y^2 = x^2(\alpha^2+\beta^2)/(\alpha^2)$ gilt, weil auch $\beta x = \alpha y, \gamma y = \alpha x$ gilt. Deswegen $\Phi = (\beta^2 - \gamma^2)(\alpha^2 - \beta^2)x^2/\alpha^2, \Theta = \beta^2(\gamma^2 - \beta^2)x^2/\alpha^4$. Daraus folgt $(x^2+y^2)\Phi + \Theta = 0$. Deswegen gilt

$$R_3 = \frac{B^2}{8b_4^6}\left\{(x^2+y^2)\Phi + \Theta + B^2\Psi\right\} = \frac{B^4}{8b_4^6}\Psi$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{B^4}{8b_4^6\alpha^2}x^2(A_{11}\alpha^2 + 2A_{12}\alpha\beta + A_{22}\gamma^2) \\
&= \frac{B^4x^2}{8b_4^6\alpha^2}\Big\{(\alpha^2+\beta^2)(10\alpha^4 - \beta^4 - \gamma^4 - 4\alpha^2\beta^2 - 4\alpha^2\gamma^2) \\
&\quad +(\gamma^2 - \beta^2 - 4\alpha^2)(\gamma^2\alpha^2 + 6\alpha^4 + 9\alpha^2\beta^2) \\
&\quad +(\alpha\beta + \alpha\gamma)(12\alpha^3\gamma + 40\alpha^3\beta + 12\alpha\beta^3) \\
&\quad +(\beta^2 - \gamma^2 - 4\alpha^2)(9\alpha^4 + 6\alpha^2\beta^2 + \beta^4)\Big\} = 0,
\end{aligned}
$$

infolge der Gleichung $\beta\gamma = \alpha^2$. Aus der Formel für die Berechnung des Wertes $R_2$ in (7) ist es leicht zu beweisen, daß

$$
\begin{aligned}
R_2 &= \frac{1}{4b_4^2}\Big\{ -\frac{\alpha^2+\beta^2}{\alpha^2}x^2 - B^2x^2[6(\alpha^2+\beta^2) + 2\frac{\beta^4}{\alpha^2}] \\
&\quad -B^4(\beta-\gamma)^2[(\beta+\gamma)^2 + 4\alpha^2]\Big\} \le 0.
\end{aligned}
$$

Damit endet der Beweis des Satzes 2. ■

Wie wir oben bemerkt haben, ist damit auch der Beweis des Theorems beendet.

## References


[1] Milnor, J., *Curvatures of left invariant metrics on Lie groups*, Advances in Math. **21** (1976), 293–329.

[2] Dotti Miatello, I., *Ricci curvature of left invariant metrics on solvable unimodular Lie groups*, Math. Z. **180** (1982), 257–263.

[3] Gromoll, D., W. Klingenberg, und W. Meyer, „Riemannsche Geometrie im Großen“, Springer-Verlag, Berlin usw., 1968.

[4] Kaiser, V. V., *Gaußsche und mittlere Krümmungen zweidimensionaler Untergruppen dreidimensionaler Liescher Gruppen*, Izvestia vysschich utschebnych zavedenij, Math. **3** (1984), 68–71.



Haundorfer Str. 20
D-91074 Herzogenaurach, Germany



Received July 27, 1993