Journal of Lie Theory
Volume **7** (1997) 201–229

Non nullité de certains relêvements par séries théta

Colette Mœglin

Communicated by J. Faraut

Abstract. In this article, one studies the theta correspondance between automorphic representations of an even orthogonal group and a symplectic group. Fix an irreducible cuspidal representation, π, of the othogonal group. One gives a necessary and sufficient condition in order that there exists an adelic character of the orthogonal group, η such that the image of $\pi \otimes \eta$ by the correspondance is non zero. One gives also an answer for the symetric question, π is now a representation of the symplectic group; here one allows change of the orthogonal space saving the dimension. The method is based on the works of Kudla, Rallis and Piatetskii-Shapiro.

Soit X un espace vectoriel muni d'une forme non dégénérée symplectique ou orthogonale de dimension paire, définie sur k. Soit π une représentation automorphe cuspidale du groupe des automorphismes de X muni de sa forme, noté $G(X)$. On relie l'existence de pôles pour certaines séries d'Eisenstein liées à π à la non nullité de certaines séries théta. Ceci est évidemment très proche des travaux de Kudla et Rallis ([K-R]) et en est même par endroits une simple copie; cela utilise aussi de façon très importante les travaux de Piatetski-Shapiro et Rallis ([G-PS-R]) sur les fonctions L. En outre des résultats complets dans le cas où l'on considère les paires réductives duales où le groupe orthogonal est compact à l'infini, ont été obtenu par S. Böcherer en [B1,2]. Cet article fait suite à plusieurs échanges entre l'auteur et S. Kudla et S. Rallis; la contribution de Kudla et de Rallis, bien qu'indirecte est extrêmement importante et je les en remercie très chaleureusement.

Soyons plus précis sur les résultats de cet article. Pour tout $a \in \mathbb{N}$, notons X_a l'espace X auquel on a ajouté a plans hyperboliques; on fixe $\ell_a^{\pm}$ des espaces isotropes en dualité de X_a de dimension a tels que:

$$X_a = X \oplus \ell_a^+ \oplus \ell_a^-.$$

On note $G(X_a)$ le groupe des automorphismes de X_a muni de sa forme et Q_a le sous-groupe parabolique de $G(X_a)$ stabilisant ℓ_a^+; on note U_{Q_a} le radical

ISSN 0949–5932 / \$2.50

unipotent de Q_a et M_{Q_a} son Levi qui s'identifie à $\mathrm{GL}(\ell_a^+) \times G(X)$. On note $M_Q(\mathbb{A})^1$ le noyau du caractère $|det_{\ell_+^a}|$ et on identifie:

$$M_Q(\mathbb{A})/M_Q(\mathbb{A})^1 \simeq \mathbb{R}^*_{>0},$$

par le caractère $|det_{\ell_+^a}|$.

On fixe des compacts maximaux, K_a, de chacun des groupes $G(X_a)$ et on fixe aussi η un caractère quadratique adélique de $\mathbb{A}^*/k^*$. On fixe une réalisation de π dans l'espace des formes automorphes cuspidales sur $G(X)(k)\backslash G(X)(\mathbb{A})$. On note $\mathbf{E_a}$ l'ensemble des formes automorphes, Φ, sur

$$U_{Q_a}(\mathbb{A})M_{Q_a}(k)\backslash G(X_a)(\mathbb{A}), \tag{1}$$

vérifiant, pour tout $t \in \mathrm{GL}(\ell_a^+)$ et tout $g \in G(X_a)(\mathbb{A})$:

$$\Phi(tg) = \eta(det\, t)\rho_{Q_a}^{1/2}(t)\Phi(g),$$

où ρ_{Q_a} est la fonction module de Q_a et aussi telle que, pour tout $k \in K_a$, la fonction $g \in G(X)(\mathbb{A}) \mapsto \Phi(g\,k)$ est dans l'espace de π. Pour $\Phi \in \mathbf{E}_a$, et pour $s \in \mathbb{C}$, on note Φ_s la forme automorphe sur (1) définie par:

$$\forall g \in G(X_a)(\mathbb{A}), \quad \Phi_s(g) = h_{Q_a}(g)^s\Phi(g),$$

où $h_{Q_a}(g)$ est l'image dans $M_{Q_a}(\mathbb{A})/M_{Q_a}(\mathbb{A})^1$ (vu comme tore réel, cf. ci-dessus) de $M_{Q_a}(\mathbb{A}) \cap U_{Q_a}(\mathbb{A})gK_a$. On peut alors former la série d'Eisenstein:

$$\forall g \in G(X_a)(\mathbb{A}), \quad E^{Q_a}(s,\Phi_s)(g) := \sum_{\gamma \in Q_a(X)(k)\backslash G(X_a)(k)} \Phi_s(\gamma\, g).$$

Cette série d'Eisenstein est définie comme fonction méromorphe de s. On montrera au paragraphe 1:

Remarque 1. *Soit $a \in \mathbb{N}$; on suppose qu'il existe $s_0 \in \mathbb{R}_{>0}$ tel qu'il existe $\Phi \in \mathbf{E}_a$ dont la série d'Eisenstein $E^{Q_a}(s,\Phi_s)$ ait un pôle en $s = s_0 + (a-1)/2$. On fixe s_0 maximal avec cette propriété. Alors pour tout $a' \in \mathbb{N}$, il existe $\Phi' \in \mathbf{E}_{a'}$ dont la série d'Eisenstein $E^{Q_{a'}}(s,\Phi'_s)$ a un pôle en $s = s_0 + (a'-1)/2$.*

Le résultat principal est de lier l'existence de pôles à ces séries d'Eisenstein aux propriétés de non nullité des relèvements par séries théta. Plus précisément, posons:

$$d(X) := \begin{matrix} \dim X + 1, \text{ si } X \text{ est symplectique} \\ \dim X, \text{ si } X \text{ est orthogonal.} \end{matrix}$$

On définit, en fixant $a \in \mathbb{N}$:

$$s_{Eis}(\pi,\eta) := \sup\{s' \in \mathbb{R}_{>0}; \exists \Phi \in \mathbf{E}_a, E(s,\Phi), \text{ a un pôle en } s = s' + (a-1)/2\},$$

si l'ensemble ci-dessus est non vide et sinon, la remarque 1 n'étant plus valable, on définit

$$s_{Eis}(\pi,\eta) := \sup\{s' \in \mathbb{R}; \forall a \text{ grand } \exists \Phi \in \mathbf{E}_a, E(s,\Phi) \text{ a un pôle simple en } s = s' + (a-1)/2\}.$$

Dans le cas où $s_{Eis}(\pi,\eta)$ est ≤ 0, il n'est déjà pas clair que les pôles des séries d'Eisenstein $E(s',\Phi)$ soient au plus simples. Et on insiste sur le fait que dans la définition, le pôle doive intervenir pour tout a grand; cette notion est relative à π et η.

Pour Y un k-espace vectoriel ayant les mêmes propriétés que X, on définit aussi $G(Y)$ et $d(Y)$. Supposons que $G(X), G(Y)$ forment une paire réductive duale, on pose alors:

$$s_{X,Y} := (d(X) - d(Y) + 1)/2.$$

Ce nombre joue un rôle clé dans toute la théorie des paires réductives duales. On note $\theta^Y(\pi)$ le relèvement de π par séries theta en formes automorphes sur $G(Y)(\mathbb{A})$; cet espace peut être nul. Posons encore:

$$s_\theta(\pi,\eta) := sup\{s_{X,Y}\},$$

où Y parcourt l'ensemble suivant: si X est symplectique, Y est orthogonal de discriminant η et $\theta^Y(\pi) \neq 0$; si X est orthogonal de dimension paire, on rappelle que la norme spinorielle définit un morphisme de $G(X)(\mathbb{A})$ dans $\mathbb{A}^*/\mathbb{A}^{*\,2}$, alors Y est symplectique et il existe un caractère χ de $G(X)$ tel que pour toute place v de k et pour tout $g_v \in G(X \otimes k_v)$ de déterminant 1:

$$\chi(g_v) = \eta(Nsp(g_v)),$$

et tel que $\theta^Y(\pi \otimes \eta) \neq 0$. Par les travaux de Rallis (cf. par exemple [R1]), on sait que $s_\theta(\pi,\eta)$ est bien défini; c'est un élément de $\mathbb{Z}$.

Le but de ce travail est de montrer:

Théorème.

$$s_{Eis}(\pi,\eta) \;=\; s_\theta(\pi,\eta).$$

L'inégalité $s_{Eis}(\pi,\eta) \geq s_\theta(\pi,\eta)$ est la partie facile du théorème; l'autre inégalité, quand $s_{Eis} > 0$, est une généralisation d'un résultat déterminant de Kudla et Rallis. Expliquons pourquoi.

Suivant Langlands, on définit la fonction L restreinte de π tordue par η, $L^S(s,\eta\times\pi)$, en ne tenant compte que des places non ramifiées. Alors Kudla et Rallis ont démontré le théorème suivant:

Théorème. ([**K-R**] 7.2.5) *Supposons que* X *soit symplectique; soit* $s_0 \in R_{\geq 1}$ *un pôle pour la fonction* $L^S(s, \eta \times \pi)$. *Alors:*

$$m := \dim X/2 - s_0 + 1 \in \mathbb{N}$$

et il existe un k*-espace orthogonal* Y *de discriminant* η *et de dimension* $2m$ *tel que le relèvement par séries théta de l'espace de* π *en un espace de formes automorphes sur* $G(Y)(k)\backslash G(Y)(\mathbb{A})$ *(*$G(Y)$ *est le groupe des automorphismes de* Y*)) soit non nul.*

Et on montrera au paragraphe 1 la remarque suivante:

Remarque 2. *Soit* $s_0 \in R_{\geq 1}$ *un pôle pour* $L^S(s, \eta \times \pi)$ *comme dans le théorème ci-dessus; on suppose que* s_0 *est maximal avec cette propriété. Alors, pour tout* $a \geq 1$, *il existe* $\Phi \in E_a$ *telle que la série d'Eisenstein* $E^{Q_a}(s, \Phi_s)$ *ait un pôle en* $s_0 + (a-1)/2$.

La réciproque n'est pas vraie, il peut y avoir des pôles pour les séries d'Eisenstein sans qu'il y en ait pour les fonctions L partielles. Les difficultés sont des zéros parasites de fonctions L^S qui apparaissent dans les circonstances suivantes: soit η' un caractère quadratique non trivial et soit S un ensemble fini de places hors duquelle η' est non ramifié. Mais on suppose qu'il existe $v \in S$ tel que η'_v soit trivial. Alors la fonction $L^S(1, s+1)L^S(\eta', s)$ n'a pas de pôle en $s = 0$ alors que la fonction $L(1, s+1)L(\eta', s)$ en a.

Ainsi le théorème évite les difficultés liées aux zéros parasites des fonctions L^S. Il n'est pas encore complètement satisfaisant dans la mesure où on voudrait encore comprendre ces pôles; cf. la partie **5** pour des exemples illustrants les difficultés.

Le théorème a un analogue pour toutes les paires réductives duales, non démontré faute de formule de Siegel-Weil (cf. le paragraphe 3 ci-dessous); extrapolons le quand même pour la paire $O(3)$ déployé et $\tilde{SL}(2)$ étudiée par Waldspurger [W] et généralisée en [R2]. Soit π une représentation automorphe cuspidale de $\tilde{SL}(2, \mathbb{A})$; avec π on construit des séries d'Eisenstein pour $\tilde{Sp}(4, \mathbb{A})$ grâce à un analogue de $\mathbf{E}_{a=1}$. Le théorème dirait que π se relève sur $O(3)(\mathbb{A})$ s'il existe $\Phi \in E_a$ tel que la série d'Eisenstein $E(s, \Phi_s)$ ait un pôle en $s = 1/2$. Par exemple si Φ est sphérique en toute place, l'existence du pôle est équivalente à $L(1/2, \pi) \neq 0$; il n'y a pas de conditions locales parce que l'hypothèse sphérique les rend automatiques.

1. Remarque sur les séries d'Eisenstein

L'objet de ce paragraphe est de démontrer les remarques 1 et 2 de l'introduction; il est inutile pour la preuve du théorème.

On prouve d'abord la remarque 1 dont on rappelle l'énoncé:

1.1 Remarque 1. *Soit $a \in \mathbb{N}$; on suppose qu'il existe $s_0 \in \mathbb{R}_{>0}$ tel qu'il existe $\Phi \in \mathbf{E}_a$ dont la série d'Eisenstein $E^{Q_a}(s, \Phi_s)$ ait un pôle en $s = s_0 + (a-1)/2$. On fixe s_0 maximal avec cette propriété et alors pour tout $a' \in \mathbb{N}$, $a' \geq a$, il existe $\Phi' \in \mathbf{E}_{a'}$ dont la série d'Eisenstein $E^{Q_{a'}}(s, \Phi'_s)$ a un pôle en $s = s_0 + (a'-1)/2$.*

On reprend les notations de l'introduction, X, η un caractère quadratique, π une représentation cuspidale de $G(X)(\mathbb{A})$. On fixe $a \in \mathbb{N}$ et on note Q'_a le sous-groupe parabolique de $G(X_a)$ stabilisateur d'un drapeau complet de sous-espaces inclus dans $\ell_{a,+}$; son Levi est isomorphe à a copies de $\mathrm{GL}(1)$ fois $G(X)$. On note U' le radical unipotent de ce parabolique et M' un Levi. On suppose que $K_a \cap M'(\mathbb{A})$ est un sous-groupe compact maximal de $M'(\mathbb{A})$.

Soit $\Phi \in \mathbf{E}_a$. Il est clair qu'à conjugaison près, Q'_a est le seul sous-groupe parabolique de $G(X_a)$ qui fournit un terme constant pour $E(s, \Phi_s)$ non nul et dont la projection sur l'espace des formes automorphes du Levi est non nul. En particulier les pôles pour $E(s, \Phi_s)$ sont les mêmes que les pôles pour le terme constant $E(s, \Phi_s)_{Q'_a}$. Calculons:

$$\forall g \in G(X_a)(\mathbb{A}) \quad E(s, \Phi_s)_{Q'_a}(g) := \int_{U'(k)\backslash U'(\mathbb{A})} E(s, \Phi_s)(u\, g)\, du.$$

La méthode est standard; on suppose d'abord que $Re\, s$ est grand pour développer la série d'Eisenstein en somme sur $Q_a(k)\backslash G(X_a)(k)$. On a à fixer un système de représentants, J, des doubles classes:

$$Q_a(k)\backslash G(X_a)(k)/Q'_a(k).$$

On note r l'indice de Witt de X; si X est symplectique $r = \dim X/2$. On fixe un tore déployé maximal T_a de $G(X_a)$ inclus dans Q' et un système de racines positives tel que T_a agisse par des racines positives dans U'. On peut prendre pour J, l'ensemble des éléments w^{-1} du groupe de Weyl tels que pour toute racine positive α incluse dans M', $w^{-1}(\alpha)$ soit encore positive tandis que pour toute racine positive α incluse dans M_{Q_a}, $w(\alpha)$ soit encore positive. On identifie le groupe de Weyl de $G(X_a)$ à $\mathfrak{S}_{r+a} \times \{\pm 1\}^{r+a}$ où encore aux applications, w, de $\{1, \cdots, r+a\}$ à valeurs dans $\{\pm 1, \cdots, \pm(r+a)\}$ telles que $w(i) \neq \pm w(j)$ si $i \neq j$, de façon évidente; pour le groupe orthogonal, on est sorti de la composante neutre. Pour (i) sous-ensemble éventuellement vide, de $[1, a]$, on note $n(i)$ le nombre d'éléments de (i) et $i_1 < \cdots < i_{n(i)}$ les éléments de (i) ordonnés; on note $i'_1 < \cdots < i'_{a-n(i)}$ les éléments du complémentaires de (i) ordonnés comme indiqué. On définit alors un élément $w_{(i)}$ de W par les relations:

$$\forall k \in [0, n(i)] \quad w_{(i)}(k) = i_k$$

$$\forall k \in]n(i), a], \quad w_{(i)}(k) = -i'_{a-k}.$$

$$\forall j \in [a+1, r+a], \quad w_{(i)}(k) = k.$$

Il est clair que ces éléments sont dans J mais J en contient d'autres qui vérifient :

$$\forall j > a, \quad w(j) > 0, \quad w(a+1) < \cdots < w(a+r)$$

et $w(a+1) \leq a$. En particulier, pour un tel w, notons i_w le plus grand entier tel que $w(a+i_w) \leq a$, alors (U_{Q_a} est le radical unipotent de Q_a) $G(X) \cap w^{-1} U_{Q_a} w$ contient le radical unipotent d'un parabolique maximal de $G(X)$ stabilisant un espace isotrope de X de dimension i_w. Comme π est cuspidal, la contribution des doubles classes correspondantes aux calculs du terme constant est nul. Pour $i \in [0,a]$, posons:

$$\forall g \in G(X_a)(\mathbb{A}), \quad \Phi_{s,(i)}(g) := \sum_{\gamma \in Q'_a(k) \cap w_{(i)} Q_a(k) w_{(i)}^{-1} \backslash Q'_a(k)} \Phi_s(w_{(i)}^{-1} \gamma g).$$

On remarque que pour tout (i), $M' \subset w_{(i)} Q_a w_{(i)}^{-1}$; ainsi la somme ci-dessus ne porte que sur

$$\gamma \in U'(k) \cap w_{(i)} Q_a(k) w_{(i)}^{-1} \backslash U'(k).$$

On trouve alors aisément, par prolongement méromorphe (et avec un choix de mesures convenables):

$$\forall g \in G(X_a)(\mathbb{A}), \quad E(s, \Phi_s)_{Q'_a}(g) = \sum_{(i)} \int_{U'(\mathbb{A}) \cap w_{(i)} Q_a(k) w_{(i)}^{-1} \backslash U'(\mathbb{A})} \Phi_s(w_{(i)}^{-1} u\, g)\, du.$$

Chaque terme est en fait un opérateur d'entrelacement: les éléments de $\mathbf{E}_a$ sont inclus dans l'ensemble des formes automorphes sur $U'(\mathbb{A}) M'(k) \backslash G(X_a)(\mathbb{A})$ se transformant à gauche sous $G(X)(\mathbb{A})$ suivant π (même condition que pour $\mathbf{E}_a$) et vérifiant pour $m' = m'_1 \cdots m'_a \in M'(\mathbb{A}) \cap \mathrm{GL}(\ell_a^+)$:

$$\forall g \in G(X_a)(\mathbb{A}), \quad \Phi_s(m' g) = \prod_{i \in [1,a]} \eta(m'_i) |m'_i|^{s-(a-1)/2+i-1} \rho_{Q'_a}(m')^{1/2} \Phi_s(g).$$

(C'est un calcul de fonctions modules)

L'opérateur d'entrelacement associé à $w_{(i)}$ se généralise en un opérateur d'entrelacement entre l'induite de la représentation:

$$\eta|\,|^{s-(a-1)/2} \cdots \times \eta|\,|^{s-(a-1)/2+i-1} \times \cdots \times \eta|\,|^{s+(a-1)/2} \times \pi$$

de M' et l'induite de l'image de cette représentation par $w_{(i)}$. Cet opérateur d'entrelacement se décompose en opérateurs élémentaires qui sont de 2 types; les uns sont dans $\mathrm{GL}(2)$ du type suivant, ici $j < k$ avec $j \in [1,a]$ et $k \in]n(i), a]$:

$$\eta|\,|^{s-(a-1)/2+j-1} \times \eta|\,|^{-s+(a-1)/2-k+1} \;\rightarrow\; \eta|\,|^{-s+(a-1)/2-k+1} \times \eta|\,|^{s-(a-1)/2+j-1};$$

les autres sont du type, pour $j \in]n(i), a]$:

$$\eta|\,|^{s-(a-1)/2+j-1} \times \pi \;\rightarrow\; \eta|\,|^{-s+(a-1)/2-j+1} \times \pi. \qquad (j)$$

Les opérateurs d'entrelacement du premier type sont certainement holomorphes si $Re\, s > (a-1)/2$. Si ceux du deuxième sont aussi holomorphes, on a l'holomorphie pour le terme correspondant à $w_{(i)}$. Ainsi $s = s'_0$ est un pôle de partie réelle strictement supérieure à $(a-1)/2$ seulement s'il existe $j \in [1,a]$ tel que l'opérateur d'entrelacement (j) ci-dessus soit non holomorphe. Mais on est dans le cas $a = 1$ après avoir remplacé s par $s-(a-1)/2+j-1$. On note s_{max} le réel positif maximum s'il existe (et $-\infty$ sinon) tel qu'il existe $\Phi \in \mathbf{E}_1$ dont la série d'Eisenstein $E^{Q_1}(s, \Phi_s)$ a un pôle en ce point, alors, nous venons de montrer que:

$$s_0' - (a-1)/2 \leq s_{max},$$

pour tout s_0' pôle comme ci-dessus.

Réciproquement supposons que $s_{max} \neq -\infty$. On va montrer que, pour tout a, $s_{max}+(a-1)/2$ est pôle pour l'une des séries d'Eisenstein $E^{Q_a}(s, \Phi_s)$ où $\Phi \in \mathbf{E}_a$. On fixe de nouveau $a \in \mathbb{N}$ en supposant que $a > 1$ pour qu'il y ait quelque chose à démontrer. On reprend les notations du début de la preuve. On remarque d'abord que pour tout (i) comme ci-dessus, les induites qui interviennent sont distinctes; il suffit donc de montrer que la partie du terme constant correspondant à $w_\emptyset$ a un pôle en $s_{max} + (a-1)/2$. (On remarque d'ailleurs que tous les autres termes sont holomorphes en ce point, d'après le raisonnement ci-dessus et la maximalité de s_{max}.) On a besoin de faire intervenir plusieurs paraboliques. Pour cela on note, pour $i \in [1, a]$, $y_i^\pm$ les sous-espaces de ℓ_a stables sous le Levi fixé, M', de Q_a' de tel sorte que

$$\ell_1^+ \subset \cdots \subset \oplus_{i \leq j} \ell_i^+ \subset \cdots \subset \oplus_{i \in [1,a]} \ell_i^+$$

soit le drapeau que Q_a' stabilise. On note Q^1 le sous-groupe parabolique de $G(X_a)$ stabilisant le drapeau $y_1^+ \subset \ell_a^+$ et Q^2 celui stabilisant le drapeau $\oplus_{i \in [1,a[} y_i^+ \subset \ell_a^+$. Pour s_1, s_2 des nombres complexes, on note, pour $\epsilon = 1$ ou 2, $\mathbf{E}_{s_1,s_2}^{Q^\epsilon}$, les fonctions automorphes sur $U_{Q^\epsilon}(\mathbb{A}) Q^\epsilon(k) \backslash G(X_a)(\mathbb{A})$ dans l'induite (normalisée) de

$$\eta \circ det |\, det\, |^{s_1} \times \eta \circ det |\, det\, |^{s_2} \times \pi$$

(on rappelle que l'on a fixé un espace pour π). On a des opérateurs d'entrelacement:

$$\mathbf{E}_{s_1,s_2}^{Q^1} \;\to\; \mathbf{E}_{s_1,-s_2}^{Q^1} \;\to\; \mathbf{E}_{-s_2,s_1}^{Q^2}, \tag{2}$$

le premier est induit par l'élément noté ci-dessus $w_{(i)}$ pour (i) réduit à $\{1\}$ et le deuxième correspond à l'élément du groupe de Weyl:

$$(1, 2, \cdots, i, \cdots, a) \;\mapsto (a, 1, \cdots, i-1, \cdots, a-1).$$

Le composé de ces 2 éléments du groupe de Weyl n'est autre que $w_{(i)}$ pour $(i) = \{a\}$. On note, ici pour $s \in \mathbb{C}$, $\mathbf{E}_{a,s}^{Q_a}$ l'induite de $\eta \circ det |\det|^s \times \pi$. Un calcul de fonctions modules donne une inclusion:

$$\mathbf{E}_{a,s}^{Q_a} \;\to\; \mathbf{E}_{s-(a-1)/2, s+1/2}^{Q^1}; \tag{3}$$

l'image se caractérise comme étant l'ensemble des fonctions $f \in \mathbf{E}_{s-(a-1)/2,s+1/2}^{Q^1}$ vérifiant pour tout $k \in K_a$ (K_a est le compact maximal fixé) et $k' \in K_a \cap \mathrm{GL}(\ell_a^+)$:

$$f(k'k) = f(k)\eta(det\, k'). \tag{4}$$

Au voisinage de $s = s_{max}+(a-1)/2$, $s_1 = s-(a-1)/2$ et $s_2 = s+1/2$, le premier morphisme écrit en (2) est bijectif: grâce à la propriété de maximalité de s_{max} il est holomorphe et la propriété d'adjonction des opérateurs d'entrelacement donne l'holomorphie de son inverse potentiel (cf. l'équation fonctionnelle). Le deuxième morphisme de (2) est bijectif, cela se voit dans GL(2). D'où (2) donne une bijection:

$$\mathbf{E}^{Q^1}_{s-(a-1)/2,s+1/2} \simeq \mathbf{E}^{Q^2}_{-s-1/2,s-(a-1)/2}. \tag{5}$$

Rappelons que l'on a noté X_1 l'espace X auquel on a ajouté un plan hyperbolique; on identifie X_1 au sous-espace de X_a égal à $y_a^+ \oplus y_a^- \oplus X$. Rappelons aussi que Q_1 est le stabilisateur de y_a^+ dans $G(X_1)$; on définit aussi $\mathbf{E}^{Q_1}_s$ les formes automorphes induites de $\eta|\,|^s \times \pi$. On a une application de restriction correspondant à l'inclusion de $G(X_1)$ dans $G(X_a)$:

$$\mathbf{E}^{Q^1}_{-s-1/2,s-(a-1)/2} \to \mathbf{E}^{Q_1}_{s-(a-1)/2}.$$

L'image est "dense" et cette propriété de densité reste vraie si l'on se limite au sous-espace de $f' \in \mathbf{E}^{Q^1}_{-s-1/2,s-(a-1)/2}$ vérifiant (4) ci-dessus. Alors (5) assure qu'en composant, on obtient:

$$\mathbf{E}^{Q_a}_{a,s} \to \mathbf{E}^{Q^1}_{s-(a-1)/2,s+1/2} \to \mathbf{E}^{Q^1}_{-s-1/2,s-(a-1)/2} \to \mathbf{E}^{Q_1}_{s-(a-1)/2}$$

d'image dense au voisinage de $s_{max} + (a-1)/2$. Mais on a aussi un diagramme commutatif dont la première ligne horizontale est le composé ci-dessus, la première (resp. deuxième) flèche verticale est l'opérateur d'entrelacement associé à $w_\varnothing$ (respectivement l'analogue de $w_\varnothing$ pour $G(X_1)$) et la deuxième ligne horizontale est la restriction (il y a là encore un calcul de fonctions modules):

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{E}^{Q_a}_{a,s} & \to & \mathbf{E}^{Q_1}_{s-(a-1)/2} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathbf{E}^{Q_a}_{a,-s} & \to & \mathbf{E}^{Q_1}_{-s+(a-1)/2} \end{array}$$

Or par hypothèse, si $s-(a-1)/2 = s_{max}$ la deuxième flèche verticale a un pôle, il en est donc de même de la première. Cela termine la preuve.

1.2 Remarque 2. *Soit $s_0 \in \mathbb{R}_{\geq 1}$ un pôle pour $L^S(s, \eta \times \pi)$; on le suppose maximum avec cette propriété. Alors, pour tout $a \geq 1$, il existe $\Phi \in E_a$ telle que la série d'Eisenstein $E^{Q_a}(s, \Phi_s)$ ait un pôle en $s_0 + (a-1)/2$.*

Soit donc s_0 un pôle réel positif maximal (s'il existe) tel que $L^S(s, \eta \times \pi)$ y ait un pôle, pour S fixé. Soit $a \in \mathbb{N}$ et fixons $\Phi \in \mathbf{E}_a$ tel que Φ soit sphérique en toutes places v non dans S. On reprend la notation Q'_a introduite en 1.1. Montrons que la série d'Eisenstein $E(s, \Phi_s)$, ou plutôt que son terme constant $E(s, \Phi_s)_{Q'_a}$, a un pôle en $s = s_0 + (a-1)/2$. On reprend le calcul fait en 1.1 et comme ci-dessus, les induites qui interviennent sont toutes distinctes, on peut donc les considérer isolément et il suffit de montrer que la partie du terme constant correspondant à $w_\emptyset$ a un pôle. Ici on a vraiment un opérateur d'entrelacement sur l'induite à partir de Q_a puisque $w_\emptyset$ respecte le Levi de Q_a. L'opérateur d'entrelacement se décompose en produit d'opérateurs d'entrelacements locaux en toutes les places $v \in S$ multiplié par la fonction méromorphe scalaire venant des places non dans S, notée abusivement $L^S(s, w_0)$ (on va la caluler). Les opérateurs d'entrelacement locaux, en un point s, ont soit des pôles soit sont non nuls; il suffit donc de démontrer que $L^S(s, w_0)$ à un pôle en $s_0 + (a-1)/2$. Pour calculer cette fonction, on peut utiliser l'inclusion de $\mathbf{E}_{a,s}^{Q_a}$ dans l'induite de la représentation:

$$\eta|\,|^{s-(a-1)/2} \times \cdots \times \eta|\,|^{s-(a-1)/2+i-1} \times \cdots \times \eta|\,|^{s+(a-1)/2} \times \pi,$$

puisque cette inclusion conserve les fonctions sphériques. On peut décomposer en symétries élémentaires comme expliqué ci-dessus et utiliser les résultats standard.

On fait le calcul dans le cas où X est symplectique; si X est orthogonal les facteurs $L_v(.,\eta)$ n'apparaissent pas. Soit v non dans S; on localise en v et l'opérateur d'entrelacement localisé sur un vecteur sphérique est la multiplication par le produit des facteurs suivant indexés par $i \in [1, a]$, (correspondant à l'entrelacement : $\eta|\,|^{s-(a-1)/2+i-1} \times \pi \to \eta|\,|^{-s+(a-1)/2-i+1} \times \pi$)

$$\frac{L_v(s-(a-1)/2+i-1, \eta\times\pi) L_v(s-(a-1)/2+i-1, \eta)}{L_v(s-(a-1)/2+i, \eta\times\pi) L_v(s-(a-1)/2+i, \eta)}$$

avec les facteurs suivants indexés aussi par $i \in [1, a]$:

$$\prod_{j\in[1,i[} \frac{L_v(s-(a-1)/2+j-1+s-(a-1)/2+i-1, 1)}{L_v(s-(a-1)/2+j+s-(a-1)/2+i, 1)}$$

correspondant à l'entrelacement dans $\mathrm{GL}(2)$:

$$\eta|\,|^{s-(a-1)/2+j-1} \times \eta|\,|^{-s+(a-1)/2-i+1} \to \eta|\,|^{-s+(a-1)/2-i+1} \times \eta|\,|^{s-(a-1)/2+j-1}.$$

Dans les produits ci-dessus, il y a des simplifications et on trouve:

$$\frac{L_v(s-(a-1)/2, \eta\times\pi) L_v(s-(a-1)/2, \eta)}{L_v(s+(a+1)/2, \eta\times\pi) \times L_v(s+(a+1)/2, \eta)}$$

multiplié par:

$$\prod_{i\in[1,a]} \frac{L_v(2s-a+i, 1)}{L_v(2s-a+2i-1, 1)}.$$

On fait le produit sur toutes les places v non dans S et on trouve:

$$\frac{L^S(s-(a-1)/2, \eta\times\pi) L^S(s-(a-1)/2, \eta)}{L^S(s+(a+1)/2, \eta\times\pi) L^S(s+(a+1)/2, \eta)}$$

$$\times \prod_{i\in[1,a]} \frac{L^S(2s-a+i, 1)}{L^S(2s-a+2i+1, 1)}.$$

En $s = s' + (a-1)/2$, on trouve

$$\frac{L^S(s', \eta \times \pi) L^S(s', \eta)}{L^S(s'+a, \eta \times \pi) L^S(s'+a, \eta)} \quad \times \quad \prod_{i \in [1,a]} \frac{L_v(2s'+i-1, 1)}{L_v(2s'+2i, 1)}.$$

Les dénominateurs n'ont pas de pôles en $s' = s_0$ (on utilise ici la propriété de maximalité de s_0) tandis que $L^S(s', \eta \times \pi)$ a un pôle par hypothèse. Or $L^S(s', \eta)$ peut avoir un pôle (si $s'_0 = 1$ et $\eta = 1$) mais certainement pas un zéro puisque $s_0 \geq 1$. D'où l'existence d'un pôle, ce que nous cherchions.

2. Rappel des résultats de Piatetski-Shapiro-Rallis, définition des fonctions $f_{\phi,s}$

Pour tout ce qui suit cf. [G-PS-R] chap. 1. On fixe ici $a \in \mathbb{N}$ et on reprend les notations $X_a, \ell_a^{\pm}, Q_a, \cdots, \pi, \mathbf{E}_a$ introduites dans l'introduction. On note X' l'espace X muni de la forme opposée et on pose:

$$W := X \oplus X',$$

$$W_a := X_a \oplus X'.$$

Soit j un isomorphisme de X sur X' vérifiant:

$$\forall x, y \in X, \quad < x, y >_X = - < j(x), j(y) >_{X'} .$$

On pose $j^+ := 1 + j$ et $j^- := 1 - j$ vu comme morphisme de X dans W. Alors:

$$W_{\pm} := j^{\pm}(X)$$

sont des sous-espaces isotropes maximaux de W et

$$W_{a,\pm} = \ell_a^{\pm} \oplus W_{\pm}$$

sont des sous-espaces isotropes maximaux de W_a.

On note $G(W_a)$ le groupe des automorphismes de W_a muni de sa forme; on note P_a le sous-groupe parabolique de $G(W_a)$ stabilisant $W_{a,+}$, U_{P_a} le radical unipotent de P_a et on identifie $M_{P_a} := P_a/U_{P_a}$ à $\mathrm{GL}(W_{a,+})$. On note $G(X')$ le groupe des automorphismes de X' muni de sa forme. On identifie $G(X')$ et $G(X_a)$ à des sous-groupes de $G(W_a)$ opérant par l'identité sur les espaces orthogonaux de X' et X_a respectivement. Ainsi $G(X_a) \times G(X')$ est un sous-groupe de $G(W_a)$. On fixe aussi K'_a un sous-groupe compact maximal de $G(W_a)$ tel que $K_a = K'_a \cap G(X_a)(\mathbb{A})$.

Définissons pour $s \in \mathbb{C}$, $\mathbf{E}'_{a,s}$: c'est l'ensemble des formes automorphes, f, sur

$$U_{P_a}(\mathbb{A}) P_a(k) \backslash G(W_a)(\mathbb{A}),$$

vérifiant:
$$\forall g_a \in G(W_a)(\mathbb{A}), \forall m \in M_{P_a}(\mathbb{A}) \simeq \mathrm{GL}(W_{a,+})(\mathbb{A}),$$
$$f(mg_a) = \eta(det\, m)|det\, m|^s \rho_{P_a}(m)^{1/2} f(g_a),$$

où ρ_{P_a} est la fonction module pour P_a. Pour $s \in \mathbb{C}$, et $f \in \mathbf{E}'_{a,0}$ on note f_s la fonction sur $G(W_a)(\mathbb{A})$:

$$\forall g_a \in G(W_a)(\mathbb{A}), \qquad f_s(g_a) = h_{P_a}(g_a)^s f(g_a),$$

où h_{P_a} est définie comme h_{Q_a} ci-dessus; c'est un élément de $\mathbf{E}'_{a,s}$. On a défini $\mathbf{E}_a$ ci-dessus, on définit de même $\mathbf{E}_{a,s}$ pour tout $s \in \mathbb{C}$.

Soit $f \in \mathbf{E}'_{a,0}$ et ϕ dans l'espace de π; montrons que l'intégrale:

$$\forall g' \in G(X_a)(\mathbb{A}), \;\; f_{\phi,s}(g') := \int_{G(X)(\mathbb{A})} f_s(g^{-1}g')\phi(g)\, dg, \tag{2}$$

est absolument convergente si $Re\, s$ est grand et qu'alors $f_{\phi,s} \in \mathbf{E}_{a,s}$. Montrons d'abord que la somme:

$$\forall g' \in G(X_a)(\mathbb{A}), g \in G(X)(\mathbb{A}), \qquad \sum_{\gamma \in G(X)(k)} f_s(g^{-1}\gamma g')$$

est absolument convergente si $Re\, s$ est grand et, en tant que fonction de $g \in G(X)(\mathbb{A})$, est à croissance lente. Pour $g \in G(X)(\mathbb{A})$, on note $j^*(g)$ l'élément de $G(X')(\mathbb{A})$ valant jgj^{-1}. Les propriétés de f_s assurent que:

$$\forall g \in G(X)(\mathbb{A}), h \in G(W_a)(\mathbb{A}), \;\; f_s(g^{-1}h) = \eta(det\, g) f_s(j^*(g)h).$$

On a donc à étudier la somme sur $\gamma \in G(X')(k)$ de $f_s(\gamma\, j^*(g)\, g')$, pour $g \in G(X)(\mathbb{A})$ et $g' \in G(X_a)(\mathbb{A})$. Mais $G(X')(k)$ est naturellement un sous-ensemble de $P_a(k)\backslash G(W_a)(k)$, d'où la convergence absolue. On obtient aussi le fait qu'elle est à croissance lente. D'où la convergence absolue de l'intégrale (2)

Fixons s tel que $f_{\phi,s}$ soit définie par l'intégrale (2). Alors $f_{\phi,s}$ est pour presque toute place v de k invariante par K_a, le compact maximal fixé de $G(X_a)(k_v)$; elle est invariante à gauche par les points adéliques du radical unipotent de Q_a et vérifie:

$$\forall t \in \mathrm{GL}(\ell_a^+)(\mathbb{A}), \forall g \in G(X_a)(\mathbb{A}), \quad f_{\phi,s}(tg) = \eta(det\, t)|det\, t|^s \rho_{P_a}(t)^{1/2} f_{\phi,s}(g). \tag{3}$$

Et pour tout $k \in K_a$ la fonction sur $G(X)(\mathbb{A})$, $g \mapsto f_{\phi,s}(g\, k)$ est dans l'espace de π. Pour montrer que $f_{\phi,s} \in \mathbf{E}_{a,s}$, il reste à vérifier:

$$\forall t \in \mathrm{GL}(\ell_a^+)(\mathbb{A}), \rho_{P_a}(t) = \rho_{Q_a}(t). \tag{4}$$

Montrons-le dans le cas où X est orthogonal; dans le cas où X est symplectique, on remplace, dans le calcul ci-dessous, le produit extérieur par le produit tensoriel symétrique. L'algèbre de Lie du radical unipotent de P_a est isomorphe à $\wedge^2(\ell_a^+ \oplus$

$j(X)$); le déterminant de $t \in \mathrm{GL}(\ell_a^+)$ pour son action dans cette algèbre de Lie est donc celui de son action dans:

$$\ell_a^+ \wedge \ell_a^+ \oplus \ell_a^+ \otimes j(X).$$

Pour calculer ρ_{Q_a}, il faut calculer le déterminant de l'action de t, comme ci-dessus, dans l'algèbre de Lie du radical unipotent de Q_a; c'est-à-dire dans

$$\ell_a^+ \wedge \ell_a^+ \oplus \ell_a^+ \otimes X.$$

Il est facile de conclure à l'égalité.

Pour étudier le comportement en fonction de s de $f_{\phi,s}$ on trivialise de façon usuelle le fibré $\mathbf{E}_{a,s}$: on fixe un modèle de π, encore noté π, qui est un produit tensoriel restreint, $\otimes'_v \pi_v$. Quand s varie, on identifie toutes les induites ci-dessus aux fonctions K'_a-finies de K'_a à valeurs dans l'espace de π. Fixons S un ensemble fini de places de k contenant les places archimédiennes et tel que pour tout v non dans S, les fonctions f et ϕ soient sphériques en cette place. On suppose que pour v dans S et pour tout $g' \in G(X_a)$ la fonction:

$$g \in G(X)(k_v) \mapsto f(g\,g'),$$

soit à support compact (on reviendra sur cette hypothèse plus loin). On note $L^S(s, \eta \times \pi)$ la fonction L restreinte de π (i.e. ne prenant en compte que les places non ramifiées) tordue par le caractère η (cf. l'introduction) et:

Lemme. *(Avec les hypothèses et notations ci-dessus) Il existe un facteur de normalisation, produit de fonctions L abéliennes restreintes, ne dépendant que de X (et non de π) calculé en $s + a/2$, noté $b_X^S(s + a/2)$ (définies en [PS-R]) tel que $b_X^S(s + a/2)^{-1} L^S(s + (a+1)/2, \eta \times \pi)^{-1} f_{\phi,s}$ est une section holomorphe en s du fibré (trivialisé) des induites $\mathbf{E}_{a,s}$.*

Supposons, comme nous en avons le droit, que f est décomposée et que dans la réalisation de π, il en soit de même de ϕ. Le lemme est alors un problème local. Aux places de S les hypothèses de compacité évitent tous les problèmes. Soit donc v une place hors de S; il faut calculer, pour tout $\tilde{\phi}_v$ dans le dual de π_v, l'intégrale:

$$\forall g' \in G(X_a)(k_v), \quad \int_{G(X)(k_v)} f_v(g\,g') < \pi_v(g)\phi_v, \tilde{\phi}_v > \quad dg. \tag{1}$$

C'est un calcul difficile fait par Piatetski-Shapiro et Rallis [G-PS-R] et repris dans [K-R], 7.2.8 et suivant. Dans loc.cit, $a = 0$; il faut donc d'abord remarquer que pour $g' \in G(X_a)(k_v)$ fixé, la fonction sur $G(X \oplus X')(k_v)$ définie par $h \mapsto f_v(hg')$ est dans l'induite du parabolique, P_0, stabilisant l'espace isotrope $j(X)$ et de son caractère:

$$\eta \circ det \ \ |det|^s \rho_{P_a}^{1/2} \rho_{P_0}^{-1/2}.$$

Les induites sont normalisées; c'est aussi le cas de [K-R] mais pas celui de [PS-R]. Or montrons:

$$\forall t \in P_0(\mathbb{A}), \ \ \rho_{P_a}(t) \rho_{P_0}(t)^{-1} = |det\, t|^a. \tag{5}$$

En effet, supposons X orthogonal (cf. ci-dessus), l'action de t, comme ci-dessus, dans l'algèbre de Lie du radical unipotent de P_a a pour déterminant celui de son action dans

$$\ell_a^+ \otimes j(X) \oplus j(X) \wedge j(X).$$

Tandis que l'action de t dans l'algèbre de Lie du radical unipotent de P_0 a pour déterminant celui de son action dans $j(X) \wedge j(X)$. D'où (5). Il faut donc, dans la formule 7.2.8 de [K-R], translater s par $a/2$ et on obtient la formule cherchée.

Remarque. *Les hypothèses de support compact aux places ramifiées sont inutiles; [K-R] 7.2.8, fournit le prolongement méromorphe en toute place.*

En effet dans [K-R] 7.2.8, le produit des termes (1) aux places de S, apparait comme le quotient de deux fonctions méromorphes; comme dans le lemme ci-dessus, et pour la même raison, il faut translater s dans les formules de loc.cit par $a/2$.

2.1. Définition, remarque. *Grâce au lemme ci-dessus, on définit $f_{\phi,s}$ comme fonction méromorphe de s à valeurs dans $\mathbf{E}_{a,s}$. Fixons s_0 et supposons a grand (notions relative à π et η). Alors $f_{\phi,s}$ est holomorphe en tout $s \geq s_0 + (a-1)/2$ et tout élément de $\mathbf{E}_{a,s}$, est "approximée" par les fonctions $f_{\phi,s}$.*

L'holomorphie résulte de l'hypothèse sur a puisque toutes les formules de [K-R] sont translatées par $a/2$ ce qui permet d'éviter pôles et zéros. Pour avoir l'approximation, c'est un problème aux places de S surtout si l'on met les hypothèses de support compact sur la restriction de f à $G(X_a)(k_v)$ (v une place de S); montrons qu'elles ne gênent pas. notons Q'_a le sous-groupe de Q_a égal à $U_{Q_a}\mathrm{GL}(\ell_a^+)$. On a une inclusion naturelle:

$$Q'_a \backslash G(X_a) \hookrightarrow P_a \backslash G(W_a). \tag{6}$$

On verra même ci-dessous que l'image est un ouvert dense au sens de Zariski. Pour toute place v, on peut prolonger n'importe quelle fonction, sur $G(X_a)(k_v)$ se transformant à gauche par un caractère de $Q'_a(k_v)$ à support compact modulo ce groupe, en une fonction, f_v, sur $G(W_a)(k_v)$ se transformant à gauche sous $P_a(k_v)$ par un caractère prolongeant celui de $Q'_a(k_v)$ et à support compact modulo ce groupe. Aux places finies, on peut en plus imposer aux fonctions d'être localement constantes, d'où la finitude sous l'action du compact. Aux places archimédiennes, v, on note $K'_{a,v}$ le compact maximal; son algèbre enveloppante opère sur toute fonction lisse sur l'espace de gauche de (6); une telle fonction se prolonge en une fonctions $K'_{a,v}$-finie si elle est annulée par un idéal de codimension finie du centre de l'algèbre enveloppante de $K'_{a,v}$. Cette condition d'annulation peut être réalisée quitte à approximer.

Pour f, ϕ comme ci-dessus, on construit les séries d'Eisenstein: $E^{P_a}(s, f_s)(g)$, pour $g \in G(W_a)(\mathbb{A})$, série d'Eisenstein pour le parabolique P_a et le groupe $G(W_a)$ ainsi que $E^{Q_a}(s, f_{\phi,s})(g)$, série d'Eisenstein pour le parabolique Q_a de $G(X_a)$. Ces séries d'Eisenstein sont des fonctions méromorphes de s, grâce aux propriétés de finitude. Alors le résultat de Piatetski-Shapiro et Rallis de [G-PS-R] s'étend en:

Proposition. *Pour tout $g' \in G(X_a)(\mathbb{A})$, on a l'égalité de fonctions méromorphes:*

$$\int_{G(X')(k)\backslash G(X')(\mathbb{A})} E^{P_a}(s,f)(g'g)j^*\phi(g)\,dg = E^{Q_a}(s,f_{\phi,s})(g').$$

(j a été défini en **2***.)*

On imite PS-R, pour calculer les doubles classes:

$$P_a(k)\backslash G(W_a)(k)/G(X_a)(k)\times G(X')(k).$$

On identifie $P_a(k)\backslash G(W_a)(k)$ à l'ensemble des sous-espaces isotropes maximaux de W_a défini sur k; soit L un tel sous-espace, on pose

$$x^+ := \dim L\cap X',$$

$$x^- := \dim L\cap (X_a).$$

On montre que $x^- = x^+ + a$ et les orbites de $(G(X_a)\times G(X'))(k)$ dans l'ensemble des sous-espaces isotropes maximaux de $W_a(k)$ sont classifiées par ce nombre x^+ qui varie entre 0 et la dimension d'un sous-espace isotrope maximal de X (c'est mot pour mot la démonstration de loc.cit).

L'orbite correspondant à $x^+=0$ est l'orbite de $W_{a,+}$ et elle est isomorphe à:

$$P_a(k)\cap(G(X_a)\times G(X'))(k)\backslash G(X_a)\times G(X')(k).$$

Soit maintenant $x^+>0$ et soit L_{x^+} un espace isotrope maximal représentant de l'orbite correspondante; on note Q_{x^+} le sous-groupe parabolique de $G(X')$ stabilisant $L_{x^+}\cap X'$. On fixe g_{x_+} un élément de $G(W_a)(k)$ qui conjugue $W_{a,+}$ et L_{x^+}; on prend pour g_0 l'élément neutre. Ainsi $\{g_{x_+}\}_{x_+\geq 0}$ forme un ensemble de représentants des doubles classes:

$$P_a(k)\backslash G(W_a)(k)/(G(X_a)\times G(X'))(k).$$

Pour tout $s\in\mathbb{C}$ de partie réelle grande et pour tout $g'\in G(X_a)(\mathbb{A})$:

$$\begin{aligned}
&\int_{G(X')(k)\backslash G(X')(\mathbb{A})} E^{P_a}(s,f)(g'g)\eta(det\,g)j^*\phi(g)\,dg\\
&= \sum_{x^+\geq 0}\int_{G(X')(k)\backslash G(X')(\mathbb{A})}\\
&\qquad\sum_{(\gamma',\gamma)\in g_{x^+}^{-1}P_a(k)g_{x^+}\cap(G(X_a)\times G(X'))(k)\backslash(G(X_a)\times G(X'))(k)}\\
&\qquad\qquad f_s(g_{x^+}\gamma'\gamma\,g'g)\eta(det\,g)j^*\phi(g)\,dg\\
&= \sum_{\gamma'\in g_{x^+}^{-1}P_a(k)g_{x^+}G(X)(k)\cap G(X_a)(k)\backslash G(X_a)(k)}\int_{G(X')(k)\cap g_{x^+}^{-1}P_a(k)g_{x^+}\backslash G(X')(\mathbb{A})}\\
&\qquad\qquad f_s(g_{x^+}\gamma'\,g'g)\eta(det\,g)j^*\phi(g)\,dg.
\end{aligned}$$

Pour tout $x^+ > 0$ la fonction de $g \in G(X')(\mathbb{A})$, $f_s(g_{x_+}\gamma' g' g)$ (γ' et g' sont fixés) est invariante pour la multiplication à gauche par les points adéliques du radical unipotent du parabolique Q_{x_+} de $G(X')$. Ainsi l'intégrale sur $G(X')(k) \cap g_{x^+}^{-1} P_1(k) g_{x^+} \backslash G(X)(\mathbb{A})$ se factorise par une intégrale sur le radical unipotent de ce parabolique de la fonction $j^*\phi$ et cette intégrale est nulle; cet argument est aussi copié de [PS-R].

Il ne reste donc que le terme correspondant à $x^+ = 0$ i.e.:

$$\sum_{\gamma' \in G(X_a)(k) \cap P_a(k) G(X')(k) \backslash G(X_a)(k)} \int_{G(X')(\mathbb{A})} f_s(\gamma' g' g) \eta(det\, g) \phi(g)\, dg,$$

ce qui n'est autre que:

$$\sum_{\gamma' \in G(X_a)(k) \cap P_a(k) G(X')(k) \backslash G(X_a)(k)} f_{\phi,s}(\gamma' g').$$

Il ne reste plus qu'à vérifier que:

$$G(X_a)(k) \cap P_a(k) G(X')(k) = Q_a(k).$$

L'inclusion de Q_a dans $G(X_a) \cap P_a G(X)$ se vérifie aisément. Réciproquement soit $g' \in G(X_a)(k)$ et soient $p_a \in P_a(k)$, $g \in G(X')(k)$ tels que:

$$g' = p_a g.$$

On note $j^*(g)$ l'élément de $G(X)(k)$ tel que $j^*(g)\, g \in P_a(k)$. Alors $g' = (p_a j^*(g) g) j^*(g^{-1})$. D'où $g' j^*(g) \in P_a(k) \cap G(X_a)(k)$. Cette intersection s'identifie à $U_{Q_a}(k) \times \mathrm{GL}(\ell_a^+)(k)$ d'où

$$g' \in G(X)(k) \times \mathrm{GL}(\ell_a^+)(k) \times U_{Q_a}(k) = Q_a(k)$$

et l'on a le résultat annoncé qui prouve la proposition.

3. Preuve de l'inégalité $s_{Eis}(\pi,\eta) \leq s_\theta(\pi,\eta)$.

On renvoit à l'introduction pour l'énoncé dont on adopte les notations. On pose:

$$s_0 := s_{Eis}(\pi,\eta)$$

et on fixe a grand de façon à ce que les fonctions $f_{\phi,s}$ soient holomorphes en $s_0 + (a-1)/2$.

Supposons d'abord que X est orthogonal et ramenons nous au cas où $\eta = 1$. On fixe un caractère χ_a de $G(W_a)(\mathbb{A})$ vérifiant pour toute place v de k et pour tout $g \in G(W_a)(k_v)$ de déterminant 1:

$$\chi(g) = \eta(Nsp\, g).$$

La restriction d'un tel caractère à $\mathrm{GL}(\ell_+)(\mathbb{A})$ n'est autre que le caractère η et sa restriction à $G(X)(\mathbb{A})$ vérifie l'hypothèse de l'énoncé. On tensorise tout par χ_a; cela fait disparaitre η. Dans le cours de la démonstration, on verra qu'il faut encore éventuellement tensoriser π par un caractère trivial sur les différents $SO(X)(k_v)$.

Ne faisons plus d'hypothèse sur X. On copie [K-R]. Grâce à la remarque 2.1, on sait qu'il existe $f \in \mathbf{E}'_a$ et ϕ dans l'espace de π tels que la fonction méromorphe $E^{Q_a}(s, f_{\phi,s})$ ait un pôle en $s = s_0 + (a-1)/2$. Il résulte de la proposition 2.2 que la série d'Eisenstein $E^{P_a}(s,f)$ a aussi un pôle en $s_0+(a-1)/2$.

3.1 Rappel sur la série d'Eisenstein associé au parabolique de Siegel.

Cette série est étudiée en détail dans [G-PS-R], part A, par. 5. et dans [K-R] mais là elle est normalisée ce qui n'est pas le cas ici. Elle est aussi un cas particulier de [M1], du moins si $\eta = 1$; le cas η quadratique quelconque se traite de façon similaire cf. ci-dessous. (Le lecteur peut donc sauter tout ce paragraphe)

On pose ici $a' = a + \dim X$, et X disparait; seul reste W_a. On note B le Borel (standard) de $G(W_a)$ et U son radical unipotent. Notons, pour $s \in \mathbb{C}$, λ_s le caractère:

$$\eta|\,|^{(a'-1)/2+s} \times \cdots \times \eta|\,|^{(a'-1)/2-i+1+s} \times \cdots \times \eta|\,|^{-(a'-1)/2+s},$$

du tore déployé (standard) de B; on note $\mathbf{E}(\lambda_s)$ les formes automorphes sur $U(\mathbb{A})B(k)\backslash G(W_a)(\mathbb{A})$ dans l'induite du caractère λ_s. On note aussi w^0 l'élément de plus grande longueur du groupe de Weyl de $\mathrm{GL}(W_{a,+})$ et $N(w^0,\lambda_s)$ l'opérateur d'entrelacement induit de l'opérateur d'entrelacement normalisé de $\mathrm{GL}(W_{a,+})$ qui est associé à w_0; (normalisé dans $\mathrm{GL}(W_{a,+})$ veut dire produit Eulérien d'opérateurs d'entrelacement locaux valant 1 sur le $K'_a \cap \mathrm{GL}(W_{a,+})(k_v)$-type $\eta_v \circ det$, en toute place v) . Alors $N(w^0,\lambda_s)$ induit, pour tout $s \in \mathbb{C}$ une surjection de $E(\lambda_s)$ sur $\mathbf{E}'_{a,s}$. Il faut donc étudier les séries d'Eisenstein, $E^{P_a}(s, N(w^0,\lambda_s)\phi_s)$, où $\phi \in E(\lambda_0)$ et ϕ_s est définie de façon standard dans $\mathbf{E}(\lambda_s)$. On calcule encore le terme constant:

$$\forall g \in G(W_a)(\mathbb{A}), \quad E^{P_a}(s, N(w^0,\lambda_s)\phi_s)_U(g);$$

c'est le seul qui puisse être non nul et cuspidal. On généralise la notation $w_{(i)}$ introduite au paragraphe 1, où ici (i) est un sous-ensemble de $[1,a']$. On normalise tous les opérateurs d'entrelacement comme on l'a fait pour celui associé à w^0 et on note $r(w,.)$ le facteur de normalisation. On obtient alors:

$$\begin{aligned}&\forall g \in G(W_a)(\mathbb{A}),\\ &E^{P_a}(s, N(w^0,\lambda_s)\phi_s)_U(g) = \sum_{(i)\subset[1,a']} r(w_{(i)}, w^0\lambda_s) N(w_{(i)}w^0,\lambda_s)\phi_s(g).\end{aligned}$$

Dans tout ce qui suit, on suppose que $Re\, s > 0$. On montre que les opérateurs d'entrelacements normalisés n'ont pas de pôles; pour cela on renvoit aux réductions faites en [M1] 2.1.5 et à [M1] 1.2.4. Les pôles proviennent donc des facteurs de normalisation; ces facteurs de normalisation calculés par Langlands, sont des produits de quotients de fonctions L. On a démontré en [M 2] 2.5 que les zéros des dénominateurs se "simplifient“ avec ceux des numérateurs. On vérifie que les fonctions L au numérateur sont des produits de fonctions du type:

$$\exists k, j \in [1, a'], k \leq a' - j, \quad L(2s + i - j, 1)$$

correspondant à la permutation dans $\mathrm{GL}(2)$:

$$\eta|\,|^{-(a'-1)/2+k-1+s} \times \eta|\,|^{(a'-1)/2-i+1+s} \rightarrow \eta|\,|^{(a'-1)/2-i+1+s} \times \eta|\,|^{-(a'-1)/2+k-1+s},$$

et, si X est symplectique, du type

$$\exists k \in [1, a'], \quad L(s - (a' - 1)/2 + i - 1 + s, \eta).$$

Ainsi si s_1 est un pôle de partie réelle > 0, $s_1 \in \mathbb{R}_{>0}$, s_1 est un demi-entier inférieur ou égal à $(a' - 1)/2 + 1$; cette borne ne peut être atteinte que si $\eta = 1$ et X est symplectique. Expliquons pourquoi les autres pôles vérifient

$$(a' - 1)/2 - s_1 \in \mathbb{N} \cup \{0\}. \tag{1}$$

Fixons s_1 un demi-entier et posons $-m' := -(a'-1)/2+s_1$, $m = (a'-1)/2+s_1$; on veut démontrer que si s_1 est un pôle positif, alors m' et m sont des entiers (éventuellement m'=0). On note $\mathbf{E}^B(x_1, \cdots, x_{a'})$ les formes automorphes sur $U(\mathbb{A})B(k)\backslash G(W_a)(\mathbb{A})$ dans l'induite du caractère:

$$\lambda_{x_1,\cdots,x_{a'}} := \eta|\,|^{m+x_1} \times \cdots \times \eta|\,|^{m-i+1+x_i} \times \cdots \times \eta|\,|^{-m'+x_{a'}},$$

où $x_1, \cdots, x_{a'} \in \mathbb{C}^{a'}$. Soit $x \in \mathbb{C}$ dans un voisinage de 0. Soit $(x_1, \cdots, x_{a'}) \mapsto \mathbf{E}^B(x_1, \cdots, x_{a'})$ une application holomorphe (dans un sens évident, toutes les induites sont identifiées à un même espace de fonctions sur K'_a). Les zéros et les pôles de la série d'Eisenstein $E^B(\lambda_{x_1,\cdots,x_{a'}}, \phi'_{x_1,\cdots,x_{a'}})$ au voisinage de 0, se décrivent ainsi:

(1) un pôle au plus simple, sur les hyperplans du type $x_i - x_{i+1} = 0$ pour $i \in [1, a']$ (il vient des fonctions L);

(2) pour $i < j \in [1, a']$, vérifiant $-2m' + i + j - 2 = 0$, un zéro simple sur l'hyperplan $x_i + x_j = 0$ (cf. [M1] 2.1.2 (ii) et surtout sa preuve);

(3) pour $i < j \in [1, a']$, vérifiant $-2m' + i + j - 2 = 1$, un pôle au plus simple sur l'hyperplan $x_i + x_j = 0$ (il vient des fonctions L);

(4) si $\eta = 1$ et si W_a est symplectique, un zéro, sur l'hyperplan $x_i = 0$ pour i, s'il existe, tel que $m' + 1 = i$ et un pôle au plus simple sur l'hyperplan $x_{i'} = 0$ pour $i' \in [1, a']$, s'il existe tel que $m' + 2 = i$ (il vient des fonctions L).

Ces pôles épuisent tous les pôles au voisinage de $\lambda_{0,\cdots,0}$. Par définition, $\lambda_{s_1+x} = \lambda_{x,\cdots,x}$. On vérifie que la série d'Eisenstein $E^{P_a}(s, N(w^0, \lambda_{s_1+x})\phi_{s_1+x})$ ($x \in \mathbb{C}$) est de la forme

$$\prod_{i \in [1,a']} (x_i - x) E^B(\lambda_{x_1,\cdots,x_{a'}}, \phi'_{x_1,\cdots,x_{a'}})_{x_i = x, i \in [1,a']}$$

pour $\phi' \in \mathbf{E}^B(0,\cdots,0)$ convenablement choisi. Ainsi les pôles de la série de droite sont les intersections des hyperplans (3) et (4) ci-dessus avec la variété $x_i = x$, pour tout $i \in [1,a']$. De même l'intersection des hyperplans (2) avec cette variété fournit des zéros. L'intersection de n'importe quel hyperplan ci-dessus avec la variété, $x_i = x$ pour tout $i \in [1,a']$, est l'hyperplan $x=0$. Remarquons que (4) n'intervient que si m' est entier et si $m'+2 \leq a'$, certainement $m'+1 \leq a'$ et donc le pôle en (4) est simplifié par le zéro. Notons d le nombre d'hyperplan intervenant en (3) et d' celui intervenant en (2). Ainsi:

$$x^{d-d'} E^{P_a}(s, N(w^0,\lambda_{s_1+x})\phi_{s_1+x})$$

est holomorphe au voisinage de $x=0$. On vérifie assez aisément que $d=d'$ si m' est un demi-entier non entier et que $d=d'+1$ si m' est entier. Ainsi, on ne peut avoir de pôle en $x=0$ que si m' est entier et ce pôle est au plus simple; c'est ce que l'on cherchait.

Il reste à décrire les résidus, ou plutôt la représentation qu'ils engendrent dans l'ensemble des formes automorphes.

On examine d'abord le point extrème. Si W_a est symplectique et si $s_1 = (a'+1)/2$: le seul opérateur d'entrelacement qui fournit un pôle est celui qui est associé à l'élément de plus grande longueur et le résidu est une fonction constante. Il sera clair ci-dessous que dans ce cas toutes les intégrales seront nulles.

Supposons maintenant que W_a est orthogonal et que $s_1 = (a'-1)/2$; ici aussi, les seuls opérateurs d'entrelacement qui fournissent des pôles sont ceux qui rendent négative la racine $\epsilon_1+\epsilon_2$. Il y en a deux car on est dans le groupe orthogonal et non spécial orthogonal et les résidus sont les combinaisons linéaires finies des fonctions, f_ϵ, indexées par les caractères, ϵ, du groupe orthogonal $G(W_a)(\mathbb{A})$ se factorisant par le déterminant:

$$\forall g \in G(W_a)(\mathbb{A}), \quad f_\epsilon(g) := (\eta, det\, g\, Nsp(g))\, \epsilon(det\, g),$$

où Nsp est la norme spinorielle produit des normes spinorielles locales et $(\ ,\ )$ est le symbole de Hilbert produit des symboles locaux. Dans ce cas là aussi toutes les intégrales ci-dessous sont nulles.

Pour décrire les résidus aux autres pôles, on va d'abord montrer que ces résidus sont des formes automorphes de carré intégrable. Fixons s_1 un pôle; d'après le résultat de Langlands, il suffit de démontrer que tous les exposants de ce résidu sont dans la chambre de Weyl obtuse négative. Ceci se traduit par: soit λ' un conjugué de λ_{s_1} tel que:

$$\left((s-s_1)\sum_{w\in J;\, ww^0\lambda_{s_1}=\lambda'} M(w,w^0\lambda_s)N(w^0,\lambda_s)\phi_s\right)_{s=s_1} \neq 0, \qquad (2)$$

alors λ' est dans la chambre de Weyl négative. Montrons-le. On définit $x'_1,\cdots,x'_{a'} \in \mathbb{R}^{a'}$ par

$$\lambda' =: \eta|\,|^{x'_1}\times\cdots\times\eta|\,|^{x'_i}\times\cdots\times\eta|\,|^{x'_{a'}}.$$

Et on doit montrer que pour tout $j \in [1, a']$:

$$\sum_{i \leq j} x'_j < 0.$$

On reprend les notations m', m introduites ci-dessus et on fixe w dans la somme (2); en particulier, il existe $(i) \subset [1, a']$ tel que $w = w_{(i)}$. Soit $j \in [1, a']$ on note $k_{(i)}$ le plus grand entier, s'il existe, tel que $i_{k(i)} \leq j$ et l'on a:

$$\sum_{i \leq j} x'_j = \sum_{k \leq k(i)} -m' + k - 1 \;\; + \sum_{k' \leq a' - k(i)} -(m - k' + 1).$$

La deuxième somme ci-dessus est certainement négative strictement (ou vide) car $m > m'$; quant à la première, pour qu'elle soit positive strictement, il faut que $-m' + k(i) - 1 \geq m' + 1$. Mais on vérifie que si $k(i)$ vérifie cette hypothèse, $M(w_{(i)}, \lambda_s)$ n'a pas de pôle en $s = s_1$; il n'inverse plus de racine α tel que $(\check{\alpha}, \lambda_{s_1}) = 1$. Sa contribution à (2) est donc nulle. Il faut aussi éliminer le cas où la deuxième somme est vide et la première nulle: ce cas correspond à $i_k = k$ pour tout $k \leq 2m' + 1$; l'opérateur d'entrelacement correspondant n'a pas non plus de pôle pour la même raison.

Maintenant que l'on sait que le résidu est de carré intégrable, on sait aussi que la représentation qu'il engendre est semi-simple; chaque composante locale, en une place v fixée, est dans le plus grand quotient semi-simple de l'induite du caractère λ'_{s_1}; plus précisément, c'est un quotient semi-simple du quotient de cette induite par le noyau de $N(w^0, \lambda'_{s_1})$. En particulier chaque composante locale est quotient semi-simple de l'induite du caractère

$$\eta|\,|^m \times \cdots \times \eta|\,|^{m-i+1} \times \cdots \times \eta|\,|^{m'+1} \times \eta \circ det_{\mathrm{GL}(2m'+1)}$$

du parabolique de Levi $m - m'$-copies de $\mathrm{GL}(1)$ fois $\mathrm{GL}(2m'+1)$. Par dualité, c'est un sous-module de l'induite du caractère du même Levi:

$$\eta|\,|_v^{-m} \times \cdots \times \eta|\,|_v^{-m+i-1} \times \cdots \times \eta|\,|_v^{-m'-1} \times \eta \circ det_{\mathrm{GL}(2m'+1)}.$$

Aux places finies, les propriétés des modules de Jacquet assurent que ce socle est au plus de longueur 2. Pour les places archimédiennes, c'est fait mais non publié, sauf erreur, par Barbasch. En fait cette représentation est exactement de longueur 2, on note $\pi(s_1, \eta, \epsilon_v)$ ses deux constituants, $\epsilon_v = \pm 1$, en fixant la notation de sorte que $\epsilon_v = 1$ pour le sous-module sphérique (si η=1 et si $\eta \neq 1$ cf. ci-dessous). Le cas du groupe symplectique est en détail dans [K-R] qui décrit essentiellement toute l'induite. Supposons que W_a est orthogonal; $\pi(s_1, \eta, 1)$ est bien défini comme le sous-module sphérique (à torsion près par le caractère $g \mapsto (\eta, det\, gNsp(g))$) et on pose $\pi(s_1, \eta, -1)$ le produit de $\pi(s_1, \eta, 1)$ avec le caractère *signe*; et l'assertion ci-dessus revient à dire que ces deux représentations du groupe orthogonal sont distinctes. On montre (en utilisant par exemple [M1] 0.0.9) que le socle cherché contient celui de l'induite:

$$\eta|\,|_v^{-m} \times \cdots \times \eta|\,|_v^{-m'-1} \times \eta|\,|_v^{-m'} \times \eta|\,|_v^{-m'} \times \cdots \times \eta|\,|_v \times \eta|\,|_v \times \eta. \qquad (4)$$

Or il est clair que l'induite de ce caractère au groupe spécial orthogonal a un seul sous-module et sa classe d'isomorphie est stable sous l'action par conjugaison du groupe orthogonal. Ainsi son image par le caractère signe est l'autre constituant de socle de l'induite à tout le groupe orthogonal.

Enonçons maintenant le résultat général.

3.1. *Soit s_1 un pôle pour $E^{P_a}(s,\Phi_s)$; on suppose que $s_1>0$; alors $s_1 \leq (a'+1)/2$ l'égalité ne pouvant se produire que si X est symplectique et $\eta=1$. Alors*

$$\Big((s-s_1)E^{P_a}(s,\Phi_s)\Big)_{s=s_1}$$

est une forme automorphe de carré intégrable. La représentation qu'elle engendre est isomorphe à la représentation triviale si $s_1=(a'+1)/2$, sinon à un sous-module de la somme :

$$\oplus_\epsilon \Pi(s_1,\eta,\epsilon),$$

où ϵ est une application de l'ensemble des places de k dans $\{\pm 1\}$, $v \mapsto \epsilon_v$, presque partout égale à 1 et où $\Pi(s_1,\eta,\epsilon)$ est le produit tensoriel restreint:

$$\otimes'_v \pi(s_1,\eta,\epsilon_v).$$

Et ϵ vérifie la condition globale:

$$\prod_v \epsilon_v = 1. \tag{5}$$

Pour le groupe symplectique, ceci est dans [K-R]. En fait tout a déjà été prouvé par ce qui précède sauf la condition globale (5); reprenons toujours les notations m,m' et notons τ l'élément du groupe de Weyl défini comme permutation par la relation:

$$\tau:\ (x_1,\cdots,x_{m-m'+1},x_{m-m'},\cdots,x_{m-m'+j-1},\cdots,x_{m+m'}\ \mapsto$$

$$(x_1,\cdots,x_{m-m'+1},-x_{m+m'},\cdots,-x_{m+m'-j+1},\cdots,-x_{m-m'}).$$

Il est clair que $(w^0)\tau(w^0)^{-1}$ stabilise λ_{s_1}; on note $N(\tau,.)$ l'opérateur d'entrelacement normalisé associé à cet élément. Et l'équation fonctionnelle des séries d'Eisenstein donne l'égalité (après un calcul de facteur de normalisation, cf [M 2] III.6(4)):

$$\Big((s-s_1)E^{P_a}(s,N(w^0,s)\phi_s)\Big)_{s=s_1} = \Big((s-s_1)E^{P_a}(s,N(w^0\tau,s)\phi_s)\Big)_{s=s_1}.$$

On définit aisément une action, $N(\tau)$ sur le socle étudié ci-dessus, qui traduit l'entrelacement défini par τ (cf. [M1] 1.2.5) et il faut savoir que $N(\tau)$ sépare les constituants en y opérant précisément par ϵ_v. Sur la représentation sphérique, il opère par définition par 1 et il faut donc démontrer qu'il opère par -1 sur l'autre. Le cas du groupe orthogonal est extrêment simple; τ provient d'un élément du groupe ortogonal de déterminant -1. Le cas du groupe symplectique a déjà été traité, rappelons-le, par [K-R] : aux places archimédiennes, le calcul a été fait par Barbasch, et aux places finies, on tord par l'involution d'Iwahori-Matsumoto généralisée par Bernstein au cas non modérément ramifié et on applique Harish-Chandra comme dans [M1] 1.2.5.

Notation. *Quand* s_1*, le pôle de la série d'Eisenstein de Siegel, est fixé, on pose plutôt, pour* ϵ *vérifiant (5):*

$$\Pi_{\eta,\epsilon} := \Pi(s_1, \eta, \epsilon).$$

3.2 Régularisation des intégrales de séries théta suivant [K-R].

Ici $s_1 := s_0 + (a-1)/2$ est un pôle pour la série d'Eisenstein $E^{P_a}(s, f_s)$ et on suppose que l'on a (cf. proposition 2.2):

$$\int_{G(X')(k)\backslash G(X')(\mathbb{A})} (s-s_1)E^{P_a}(s,f_s)(g'g)j^*\phi(g)dg = (s-s_1)E^{Q_a}(s, f_{\phi,s})(g') \quad (6)$$

est holomomorphe en s_1 non identiquement 0.

Quitte à changer f, on suppose que la représentation engendrée par la forme automorphe:

$$\Big((s-s_1)E^{P_a}(s,f)\Big)_{s=s_1}$$

est irréductible tout en vérifiant encore la non nullité de (6). En particulier, on a sûrement $s_1 < (a'+1)/2$, avec les notations de **3.1** et même si X est orthogonal, $s_1 < (a'-1)/2$ (cf en **3.1** ce qui précède l'énoncé du théorème). D'après **3.1**, il existe une fonction ϵ comme ci-dessus telle que cette représentation soit isomorphe à $\Pi_{\eta,\epsilon}$.

Supposons que X est orthogonal; on se ramène au cas où ϵ est la fonction 1 (on a déjà supposé $\eta = 1$). Pour cela, on note χ_ϵ le caractère de $G(W_a)$ trivial en toute place v où $\epsilon_v = 1$ et valant le caractère signe aux autres places; grâce à la condition (5) ce caractère est trivial sur $G(W_a)(k)$. On voit aussi χ_ϵ comme une fonction sur $G(W_a)(\mathbb{A})$ et tous ses sous-groupes. Il est clair que $\chi_\epsilon f \in \mathbf{E}'_a$. La représentation engendrée par:

$$\Big((s-s_1)E^{P_a}(s,\chi_\epsilon f_s)\Big)_{s=s_1}$$

est $\Pi_{\eta,1} \simeq \Pi_{\eta,\epsilon} \otimes \chi_\epsilon$. La fonction $\chi_\epsilon\phi$ est dans l'espace de $\chi_\epsilon \otimes \pi$ et le premier membre de (6) ne change pas si on y remplace f par $\chi_\epsilon f$ et ϕ par $\chi_\epsilon\phi$. C'est donc ici que l'on remplace π par $\chi_\epsilon \otimes \pi$ et on a alors $\epsilon = 1$ si X est orthogonal. On définit alors Y comme étant le k-espace symplectique dont la dimension vérifie:

$$\dim Y := 2((a'-1)/2 - s_1) = 2(\dim X/2 - s_0).$$

Cette dimension est positive, d'après ce qui précède.

Si X est symplectique, on va aussi définir Y (c'est la définition de [K-R]); Y est le k-espace orthogonal de discriminant η dont la dimension vérifie:

$$\dim Y := 2((a'+1)/2 - s_1) = 2(\dim X/2 - s_0 + 1)$$

et, en toute place v, d'invariant de Hasse ϵ_v (si v est réelle, on prend la forme de type p_0, q_0 où p_0, q_0 sont définis en [K-R] 2.8). La condition (5) assure que Y est bien défini et de dimension positive.

Comme dans [K-R], il faut réaliser la représentation $\Pi_{\eta,\epsilon}$ à l'aide de séries theta pour la représentation métaplectique associée à l'espace symplectique $W_a \otimes Y$; on note $G(Y)$ le groupe des automorphismes de Y.

On veut utiliser les intégrales sur $G(Y)(k)\backslash G(Y)(\mathbb{A})$ des séries theta; comme ces intégrales ne convergent pas on utilise [K-R] par 5 pour les régulariser (ce paragraphe de [K-R] inclus le cas orthogonal). Précisément, [K-R] construit un opérateur différentiel, z, provenant du centre de l'algèbre enveloppante de $G(W_a)$, tel que pour toute fonction de Schwartz, f', sur $W_{a,+} \otimes Y(\mathbb{A})$ la série $\theta_{z.f'}$ soit à décroissance rapide en tant que fonction sur $G(Y)(k)\backslash G(Y)(\mathbb{A})$. Pour inverser l'action de z, [K-R] construit une série d'Eisenstein pour $G(Y)$, $E(s,h)$ et un point $s'_0 \in \mathbb{R}$ tel que $(s-s'_0)E(s,h)$ soit holomorphe en $s = s'_0$ et soit, en ce point, la fonction 1. Ils notent $P(s)$ le polynôme tel que $z.E(s,h) = P(s)E(s,h)$. Ils considèrent pour $g_a \in G(W_a)(\mathbb{A})$:

$$P(s)^{-1} \int_{G(Y)(k)\backslash G(Y)(\mathbb{A})} \theta_{zf'}(g_a, h) E(s,h)\, dh,$$

comme fonction méromorphe de s. En s'_0, $P(s)$ ne s'annule pas ([K-R], 5.5.6) et on note $B(f')(g_a)$ le résidu en $s = s'_0$ i.e:

$$P(s'_0)^{-1} \int_{G(Y)(k)\backslash G(Y)(\mathbb{A})} \theta_{zf'}(g_a, h)\, dh.$$

Il faut savoir que la représentation de $G(W_a)(\mathbb{A})$ engendrée par ces résidus est isomorphe à $\Pi_{\eta,\epsilon}$; c'est une conséquence de la formule de Siegel-Weil de [K-R] si X est symplectique; heureusement le cas orthogonal se déduit aussi de [K-R]. En effet [K-R], 5.5.12 et suivant, montre que l'intégrale régularisée est un résidu de série d'Eisenstein pour $G(W_a)(\mathbb{A})$ à partir d'un parabolique de Levi isomorphe à:

$$\mathrm{GL}(\dim Y/2) \times O(\dim W_a - \dim Y),$$

où $O(\dim Y)$ est le groupe orthogonal déployé de dimension $\dim W_a - \dim Y$; on induit la représentation:

$$|det|^{(\dim Y/2+1)/2} \times 1. \tag{7}$$

Pour clarifier les exposants qui interviennent remarquons que cette induite (7) est quotient de l'induite à partir du Borel et du caractère:

$$\begin{aligned} &|\,|^{\dim Y/2} \times \cdots \times |\,|^{\dim Y/2-i+1} \times \cdots \times |\,| \times |\,|^{(\dim W_a - \dim Y)/2-1} \times \cdots \\ &\times |\,|^{(\dim W_a-\dim Y)/2-j} \times \cdots \times |\,|^0. \end{aligned} \tag{8}$$

Une propriété des opérateurs d'entrelacement démontré pour les groupes linéaires ([M-W] 1.11) assure que l'induite (7) (pas la (8) évidemment) est quotient de l'induite à partir du Borel et du caractère dans la fermeture de la chambre de Weyl positive conjugué de celui écrit en (8). Le résidu des séries d'Eisenstein associé est nécessairement sphérique; c'est la représentation calculée en [M2] et associée à l'orbite nilpotente de $O(\dim W_a, \mathbb{C})$ de blocs de Jordan $(\dim W_a - \dim Y - 1; \dim Y + 1)$. Cette représentation est de carré intégrable, elle intervient avec multiplicité 1 dans l'espace des formes automorphes engendrées par les résidus de séries d'Eisenstein à partir du Borel (cf. le calcul du produit scalaire de [M 1]) et on l'identifie aisément à $\Pi_{\eta=1,\epsilon=1}$ (ces deux représentations sont quotient de la même série principale en toutes places). Bien sûr le résultat de multiplicité 1 plus général de [K-R] 3.1, peut aussi se démontrer dans le cas des groupes orthogonaux en suivant leur démonstration.

3.3 Fin de la preuve.

Grâce à 3.2, on a obtenu dans tous les cas la propriété suivante: il existe $f \in E'_a$ et f' une fonction de Schwartz comme ci-dessus avec, ici encore $s_1 = s_0 + (a-1)/2$:

$$0 \neq \Big((s-s_1)E^{P_a}(s,f)(g_a)\Big)_{s=s_1} = \int_{G(Y)(k)\backslash G(Y)(\mathbb{A})} \theta_{zf'}(g_a,h)\,dh.$$

et (6) est aussi non nul pour ce choix de f. En reportant dans (6), on obtient que la fonction de $g_a \in G(X_a)(\mathbb{A})$:

$$g_a \mapsto \int_{G(X')(k)\backslash G(X')(\mathbb{A})} \int_{G(Y)(k)\backslash G(Y)(\mathbb{A})} \theta_{z.f'}(g\,g_a,h) j^*\phi(g)\ \, dg\,dh,$$

est non nulle. Les fonctions sont à décroissance rapide (cf. [K-R], 5.3, pour la série thêta) on peut donc échanger les intégrales et on obtient:

$$0 \neq \int_{G(X)(k)\backslash G(X)(\mathbb{A})} \theta_{zf'}(g_a g,h)\phi(g)\ \, dg.$$

Quitte à changer f' par un translaté convenable sous l'action de $G(X_a)(\mathbb{A})$ de zf', on peut supposer que:

$$0 \neq \int_{G(X')(k)\backslash G(X')(\mathbb{A})} \theta_{f'}(g) j^*\phi(g)\ \, dg. \tag{9}$$

On écrit $S_{X_a\otimes Y}$ la représentation métaplectique pour l'espace écrit en indice et on définit de même $S_{X'\otimes Y}$. Ainsi f' est un élément du produit tensoriel:

$$S_{X_a\otimes Y} \otimes S_{X'\otimes Y}$$

dans un modèle de Schrödinger convenable. Mais on peut changer de modèle de Schrödinger (cela se fait par tranformation de Fourier, opération qui respecte la sommation de Poisson); en particulier on réalise f' dans le produit tensoriel de modèle de Schrödinger de chacune des représentations écrites. En gardant la non nullité en (9), on peut remplacer f' par un produit $f_a f_{X'}$ où f_a est dans un modèle de Schrödinger pour $S_{(X_a\otimes Y)}$ et $f_{X'}$ dans un modèle de Schrödinger pour $S_{X'\otimes Y}$. Alors le terme de droite de (9) est le produit de θ_{f_a} calculée en l'élément neutre et de:

$$\int_{G(X')(k)\backslash G(X')(\mathbb{A})} \theta_{f_{X'}}(g) j^*\phi(g)\ \, dg. \tag{10}$$

En particulier (10) est non nul ce qui prouve la non nullité du relèvement par série théta (en faisant un changement de variables grâce à j).

4. Preuve de l'inégalité $s_{Eis}(\pi,\eta) \geq s_\theta(\pi,\eta)$.

Soient X, Y comme dans la fin de l'introduction; en particulier $G(X)$ et $G(Y)$ forment une paire réductive duale et on utilisera $s_{X,Y}$ défini dans l'introduction. On garde aussi la notation X_a pour $a \geq 0$ ($X_0 := X$). On note $S_{X_a,Y}$ la représentation métaplectique associée à l'espace $X_a \otimes Y$ que l'on réalise dans un modèle de Schrödinger.

Pour ϕ dans l'espace de π et $f \in S_{X,Y}$, on pose pour tout $h \in G(Y)(\mathbb{A})$:

$$\theta(f,\phi)(h) := \int_{G(X)(k)\backslash G(X)(\mathbb{A})} \theta_f(g,h)\phi(g)\, dg$$

On adopte aussi les notations $Q_a, \mathbf{E}_a$ de l'introduction et X', W_a, P_a de **2**.

4.1 Rappelons le lemme devenu banal.

Lemme. *Soit $G(X), G(Y)$ une paire réductive duale, soit π comme ci-dessus. On suppose que $\theta^Y(\pi) \neq 0$ et est cuspidale. Alors, pour tout $a \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, il existe ϕ dans l'espace de π, $f \in S_{X,Y}$ et $f_a \in S_{X_a,Y}$ tels que la fonction de $g' \in G(X_a)(\mathbb{A})$:*

$$\int_{G(Y)(k)\backslash G(Y)(\mathbb{A})} \theta_{f_a}(g',h)\theta(f,\phi)(h)\, dh$$

ne soit pas identiquement 0.

Le cas de $a = 0$: on fixe ϕ dans l'espace de π et $f \in S_{X,Y}$ tel que $\theta(f,\phi)$ soit non nul. Alors $\overline{f} \in S_{X,Y}$ et l'intégrale sur $G(Y)(k)\backslash G(Y)(\mathbb{A})$ de la fonction de h :

$$\int_{G(X)(k)\backslash G(X)(\mathbb{A}) \times G(X)(k)\backslash G(X)(\mathbb{A})} \theta_f(g,h)\phi(g)\theta_{\overline{f}}(g',h)\overline{\phi}(g')\, dg dg'$$

est non nulle; on peut échanger l'intégrale en g' et celle en h, ainsi ϕ, f et $f_0 := \overline{f}$ satisfont aux conditions du lemme.

Fixons $a \in \mathbb{N}$. Par hypothèse, $\theta(f,\phi)$ est cuspidale. On peut donc considérer pour tout $f_a \in S_{X_a,Y}$ la forme automorphe sur $G(X_a)(\mathbb{A})$:

$$\forall g_a \in G(X_a)(\mathbb{A}), \quad \int_{G(Y)(k)\backslash G(Y)(\mathbb{A})} \theta(f,\phi)(h)\theta_{f_a}(g_a,h)\, dh. \tag{1}$$

On calcule son terme constant relativement au parabolique Q_a. On note ℓ_a^+ un espace isotrope de X_a de dimension a stabilisé par Q_a (cf l'introduction). On réalise $S_{X_a,Y}$ dans $S(\ell_a^+ \otimes Y)(\mathbb{A}) \otimes S_{X,Y}$ ($S(.)(\mathbb{A})$ est l'espace des fonctions de Schwartz). L'évaluation en $0 \in \ell_a^+ \otimes Y$, donne un morphisme:

$$S_{X_a,Y} \;\to\; S_{X,Y},$$

équivariant pour l'action de $G(Y)(\mathbb{A})$ et de $G(X)(\mathbb{A})$ plongé dans $G(X_a)(\mathbb{A})$ en prolongeant trivialement l'action des éléments sur $X(\mathbb{A})^\perp$.

Pour $F \in S_{X_a,Y}$, on note $F_{|X,Y}$ l'image de F par ce morphisme.

Un calcul classique, qui utilise la cuspidalité de $\theta(f,\phi)$, montre que le terme constant cherché vaut:

$$\int_{G(Y)(k)\backslash G(Y)(\mathbb{A})} \theta(f,\phi)(h)\theta^{X,Y}_{\left(\omega_{X_a,Y}(g_a)f_a\right)_{|X,Y}}(1,h)\,dh, \tag{2}$$

où $\omega_{X_a,Y}$ est la représentation de $G(X_a)(\mathbb{A})$ dans $S_{X_a,Y}$ et $\theta^{X,Y}$ est la série théta pour la représentation $S_{X,Y}$. La preuve dans le cas $a=0$, montre qu'il suffit de prendre f,ϕ tels que $\theta(f,\phi)\neq 0$ et f_a tel que $(f_a)_{|X,Y} = \overline{f}$ pour que la fonction (1) soit non nulle en l'identité. D'où le lemme.

4.2. Comme en **3.2**, on note z l'élément de [K-R], 5.2.1, permettant de régulariser les intégrales de séries d'Eisenstein pour $S_{X'\oplus X_a,Y} = S_{W_a,Y}$; on voit z comme un élément du centre de l'algèbre enveloppante de $G(Y)$. Il est donné explicitement en [K-R] 5.1.2 et 5.5.4 qu'il faut généraliser au cas où Y est symplectique. Ecrivons le résultat dans tous les cas; on pose $2N := \dim W_a$ et $\ell := \dim Y/2$.
Si X est symplectique d'où Y orthogonal:

$$z = \prod_{j=1}^{j=\ell}(y_j^2 - (N-\ell+1)^2),$$

tandis que si X est orthogonal, d'où Y symplectique:

$$z = \prod_{j=1}^{j=\ell}(y_j^2 - (N-\ell)^2).$$

La formule générale est donc:

$$z = \prod_{j=1}^{j=\ell}(y_j^2 - ((d(W_a) - d(Y)+1)/2)^2) = \prod_{j=1}^{j=\ell}(y_j^2 - s_{W_a,Y})$$

Notons $z(tr)$ le scalaire par lequel z opère sur la représentation triviale. C'est-à-dire $z(tr)$ est la valeur de la fonction ci-dessus en $y_j = j-1$, $\forall j$, si Y est orthogonal et $y_j = j$, $\forall j$, si Y est symplectique. En particulier $y_\ell = [(d(Y)-1)/2]$. La non nullité de $z(tr)$ est donc équivalente à:

$$s_{W_a,Y} > [(d(Y)-1)/2].$$

Or, on vérifie cas par cas que $s_{W_a,Y} = [(2d(X)-d(Y)+1)/2]+a$, d'où:

$$z(tr)\neq 0 \iff$$
$$[(2d(X)-d(Y)+1)/2]+a = d(X)+a+[(-d(Y)+1)/2] > [(d(Y)-1)/2].$$

Or pour $M \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, $-[-M/2] + [M/2] = M$, d'où:

$$z(tr) \neq 0 \ \Leftrightarrow \ d(X) + a \geq d(Y). \tag{1}$$

Si a est suffisamment grand, cette inégalité est satisfaite. Soient encore ϕ dans l'espace de π, $f \in S_{X,Y}$ et $f_a \in S_{X_a,Y}$, alors:

$$\begin{aligned}\int_{G(Y)(k)\backslash G(Y)(\mathbb{A})} & z\big((\theta(f,\phi)(h)\theta_{f_a}(g_a,h)\big)\, dh \\ &= z(tr) \int_{G(Y)(k)\backslash G(Y)(\mathbb{A})} \theta(f,\phi)(h)\theta_{f_a}(g_a,h)\, dh. \end{aligned} \tag{2}$$

On remarque encore que la représentation de $G(X)$ dans $S_{X,Y}$ et isomorphe à celle se réalisant dans $S_{X',Y}$ en conjuguant par une similitude de X de rapport -1. En mettant ensemble **4.1**, (1) et (2) ci-dessus, on obtient le corollaire:

Corollaire. *Soient X, Y, π comme en* **4.1**. *On suppose que (1) est réalisée et soit z comme ci-dessus. Alors, il existe $F \in S_{W_a,Y}$ et $\phi \in \pi$ tels que la fonction de $g' \in G(X'_a)(\mathbb{A})$:*

$$\int_{G(Y)(k)\backslash G(Y)(\mathbb{A})} \int_{G(X)(k)\backslash G(X)(\mathbb{A})} \theta_{z.F}((g,g_a),h)\phi(g)\, dg\, dh,$$

ne soit pas identiquement nulle.

4.3

Corollaire. *Soient X, Y, π comme en* **4.2**; *en particulier $\theta^Y(\pi) \neq 0$ et est cuspidale. On note η le discriminant de Y. Alors*

$$s_{Eis}(\pi,\eta) \geq s_{X,Y}.$$

On fixe a grand de sorte que les fonctions $f_{\phi,s}$ de **2.1** soient holomorphes en

$$s_1 := s_{X,Y} + (a-1)/2.$$

Et on suppose aussi que **4.2** (1) est satisfait. On fait la démonstration de **3** à reculons. On fixe F, ϕ satisfaisant au lemme **4.2**. On obtient la non nullité de la fontion de $g' \in G(X_a)(\mathbb{A})$:

$$\int_{G(Y)(k)\backslash G(Y)(\mathbb{A})} \int_{G(X)(k)\backslash G(X)(\mathbb{A})} \theta_{z.F}((g,g'),h)\phi(g)\, dg\, dh.$$

En échangeant les intégrales et en utilisant la formule de Siegel-Weil telle qu'énoncée en **3.2**, on voit qu'il existe $f \in E'_{a,0}$ (cf. **2.** pour la notation) tel que:

$$\int_{G(Y)(k)\backslash G(Y)(\mathbb{A})} \theta_{z.F}((g,g'),h)\, dh = \Big((s-s_1)E^{P_a}(s,f)(g,g')\Big)_{s=s_1}.$$

D'où:

$$0 \neq \int_{G(X)(k)\backslash G(X)(\mathbb{A})} \Big((s-s_1) E^{P_a}(s,f)(g,g') \Big)_{s=s_1} \phi(g)\, dg,$$

où $f \in E'_{a,0}$ convenable. D'après la proposition **2.2**, on peut encore écrire la fonction ci-dessus comme étant:

$$\Big((s-s_1) E^{Q_a}(s, f_{\phi,s})(g') \Big)_{s=s_1}.$$

Ainsi s_1 est un pôle simple pour la fonction méromorphe $E^{Q_a}(s, f_{\phi,s})$; l'hypothèse sur l'holomorphie de $f_{\phi,s}$, assure que s_1 est un pôle pour la série d'Eisenstein, d'où par définition de $s_{Eis}(\pi,\eta)$:

$$s_1 = s_{X,Y} + (a-1)/2 \leq s_{Eis}(\pi,\eta) + (a-1)/2.$$

Cela termine la preuve.

On a ainsi prouvé le théorème annoncé dans l'introduction.

5. Exemple et commentaires.

Ici, on donne un exemple qui contredit l'idée séduisante suivante: soient X, Y fixés comme dans la fin de l'introduction et π une représentation cuspidale irréductible de $G(X)$. On suppose que $d(X) \geq d(Y)$ et même que $s_{X,Y} > 1$; on suppose aussi que X est symplectique. Pour que $\theta^Y(\pi)$ soit non nul, il n'est pas vrai qu'il suffise que la fonction $L(s, \eta \times \pi)$ (η est le discriminant de Y) ait un pôle en $s = s_{X,Y}$ et que que les composantes locales π_v de π ait une image dans chaque correspondance de Howe locale.

Soient η_i pour $i \in \{1,2,3\}$ des caractères quadratiques distincts de $\mathbb{A}^*/k^*$ vérifiant:

$$1 = \eta_1\eta_2\eta_3.$$

On suppose ces caractères triviaux aux places archimédiennes. Pour $i \in \{1,2,3\}$, on fixe une collection $(\epsilon_{i,v})$ indéxée par les places de k de nombres égaux à ± 1; on suppose que $\epsilon_{i,v} = 1$ sauf éventuellement pour un ensemble fini de places ne contenant pas les places archimédiennes. On impose aussi:

$$\forall i \in [1,3], \ \prod_v \epsilon_{i,v} = 1$$

et

$$\forall v, \quad \epsilon_{1,v}\epsilon_{2,v}\epsilon_{3,v}. = 1$$

On note Y' le k-espace orthogonal de dimension 4, déployé aux places archimédiennes, de discriminant η_1 et d'invariant de Hasse en toute place v, $\epsilon_{1,v}$. On note χ le caractère de $O(Y')(\mathbb{A})$ valant en toute place v et pour tout $g_v \in O(Y'_v)$:

$$\chi(g_v) = \eta_3(det\, g_v\, Nsp(g_v))\, \epsilon_{3,v}(det\, g_v).$$

Imposons encore qu'il existe une place v_0 finie de k tel que η_i soit trivial en cette place pour tout $i \in \{1,2,3\}$ et $\epsilon_{1,v_0} = -1 = \epsilon_{3,v_0}$. Cela assure que $O(Y' \otimes_k k_{v_0})$ est compact et que χ est le caractère signe en cette place.

On regarde la paire $O(Y'), Sp(8)$; on vérifie, ou plus exactement on admet ici, que le caractère χ se relève par série théta en une représentation cuspidale de $Sp(8)(\mathbb{A})$ (la composante locale en la place v_0 est cuspidale); on la note π. On admet aussi que la fonction L, pour tout caractère quadratique η, de $\pi \times \eta$ vaut:

$$L(s, \pi \times \eta) = L(s-2, \eta_1\eta)L(s-1, \eta_1\eta)L(s-1, \eta_1\eta_3\eta)L(s, \eta_3\eta).$$

(cf. [K-R] 7.1.4, pour une justification) On prend pour η le caractère η_2. En particulier la fonction L ci-dessus a un pôle en $s = 2$. Fixons v une place de k et notons Y_v l'espace orthogonal de dimension 6, déployé si v est archimédienne, et, si v est fini, de discriminant η_v et d'invariant de Hasse $\epsilon_{Y,v} := \epsilon_{2,v}$ si $\eta_{1,v} \neq \eta_{2,v}$ et $\epsilon_{Y,v} := \epsilon_{1,v}$ sinon. On peut, et nous le ferons, supposer que:

$$\prod_v \epsilon_{Y,v} = 1.$$

Ainsi, il existe un espace orthogonal, Y, défini sur k tel que $Y_v = Y \otimes_k k_v$ en toute place v. En prenant pour X l'espace symplectique de dimension 8,

$$s_{X,Y} = 2.$$

En outre, en toute place v, π_v est l'image d'une représentation de $O(Y_v)$ (cf. [M3]). Et pourtant π ne se relève pas à $O(Y)(\mathbb{A})$ ($s_{Eis}(\pi, \eta) \leq 0$). Il semble qu'il faille aller jusqu'à la dimension 14 pour avoir un relèvement. Changer l'invariant de Hasse en une place empêche le relèvement local avant la dimension 14. Pour qu'il y ait relèvement en dimension 6, il aurait fallu que π se relève en toutes places au groupe de l'espace orthogonal de discriminant η_2 et d'invariant de Hasse $\epsilon_{2,v}$ en toutes places; mais ceci n'est pas vrai à la place v_0.

Admettons les conjectures standard de Langlands sur la normalisation des opérateurs d'entrelacements et supposons encore X symplectique. Il reste néanmoins vrai que pour avoir $s_{Eis}(\pi, \eta) > 1$, il faut que la fonction $L(s, \eta \times \pi)$ ait un pôle positif (ce n'est pas suffisant, il y a aussi une condition sur les opérateurs d'entrelacements qui ne doivent pas être nuls). Pour avoir $s_{Eis}(\pi, \eta) \leq 1$, il faut que la fonction L ne soit pas nulle en un point convenable mais il y a aussi en plus une condition de non nullité de certains opérateurs d'entrelacements. Et ce sont ces conditions de non nullité qui sont difficiles à interpréter dans tous les cas.

Bibliographie

[B1] Böcherer, S., *Siegel Modular Forms and theta Series*, Proc. Symp. Pure Math. **49** (1989), vol 2, 3–17.

[B2] Böcherer, S., *Über den Kern der Thetaliftung*, Abhandlungen aus dem Math. Seminar der Uni. Hamburg **60** (1990), 209–223.

[G-PS-R] S. Gelbart, S., I. Piatetski-Shapiro, and S. Rallis, *Explicit constrictions of Automorphic L-Functions*, Lecture Notes in Math. (Springer) **1254** (1987).

[K-R] Kudla, S., and S. Rallis, *A regularized Siegel-Weil formula: the first term identity* Ann. of math. **140** (1992), 1–80.

[M1] Mœglin, C. *Représentations unipotentes et séries d'Eisenstein*, Forum Mathematicum **6** (1994), 651–744.

[M2] Mœglin, C. *Orbites unipotentes et spectre discret non ramifié*, Compositio Math., **77** (1991), 1–54.

[M3] —, *Représentations quadratiques unipotentes pour les groupes classiques p-adiques,* Duke math. J. **84** (1996), 267–332.

[M-W] —, et J.-L. Waldspurger, *Le spectre résiduel de* $\mathrm{GL}(n)$, Ann de l'ENS **22** (1989), 605–674.

[R1] Rallis, S.,*On the Howe duality conjecture*, Compositio. Math. **51** (1984), 333–399.

[R2] —, *L-functions and the oscillator representation*, Lecture Notes in Math (Springer) **1245** (1987).

[W] Waldspurger, J.-L., *Correspondance de Schimura*, Journ. de math. pures et app. **59** (1980), 1–133.

Colette Mœglin
Mathématiques
Université Paris 7
F-75251 Paris cedex 05
email moeglin@math.jussieu.fr

Received May 24, 1996