Journal of Lie Theory
Volume **8** (1998) 311–324


# Restrictions à un sous-espace de Cartan des fonctions $\mathcal{C}^\infty$ invariantes sur l'espace tangent d'un espace symétrique

**Nouri Kamoun**

Communicated by J. Faraut

**Abstract.** Let $G$ be a real connected reductive Lie group, $\sigma$ an involution of $G$, and $H$ the identity component of the group of its fixed points. Let $\mathfrak{g}$ denote the Lie algebra of $G$, $\mathfrak{g}=\mathfrak{h}\oplus\mathfrak{q}$ its decomposition into $\pm1$-eigenspaces for $\sigma$, and $\mathfrak{a}$ a Cartan subspace of $\mathfrak{q}$. We study the restriction to $\mathfrak{a}$ of $H$-invariant differentiable functions on $\mathfrak{q}$, and we give a description of the image of this map.

## Introduction

Soient $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie semi-simple complexe, $G$ son groupe adjoint, $\mathfrak{h}$ une sous-algèbre de Cartan de $\mathfrak{g}$ et $W$ le groupe de Weyl de $G$ dans $\mathfrak{h}$. On note $P(\mathfrak{g})^G$ (resp. $P(\mathfrak{h})^W$) l'algèbre des fonctions polynomiales sur $\mathfrak{g}$ (resp. $\mathfrak{h}$) invariantes par $G$ (resp.$W$). Alors , d'après Chevalley, l'application de restriction est un isomorphisme de $P(\mathfrak{g})^G$ sur $P(\mathfrak{h})^W$. Cette application de restriction est encore injective de l'espace $\mathcal{C}^\infty(\mathfrak{g})^G$ des fonctions $\mathcal{C}^\infty$-invariantes par $G$ sur $\mathfrak{g}$, dans l'espace $\mathcal{C}^\infty(\mathfrak{h})^W$ des fonctions $\mathcal{C}^\infty$ -invariantes par $W$ sur $\mathfrak{h}$, mais elle n'est pas surjective en général (voir [2], exemple 8.2). Dans ([2], corollaire 7.1 ), nous avons donné une caractérisation de l'image.

Dans cet article, nous nous proposons d'étudier le problème analogue pour les algèbres de Lie semi-simples réelles. Comme nos résultats sont aussi valables pour l'espace tangent d'un espace symétrique réductif, nous nous plaçons plutôt dans ce cadre.

Supposons dans la suite que $G$ est un groupe réductif réel, connexe, muni d'une involution notée $\sigma$. La différentielle de $\sigma$ sera aussi noteé $\sigma$; c'est une involution de l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ de $G$. Alors on a la décomposition de $\mathfrak{g}$ en somme directe $\mathfrak{g}=\mathfrak{h}\oplus\mathfrak{q}$ où $\mathfrak{h}=\{X\in\mathfrak{g};\sigma(X)=X\}$ et $\mathfrak{q}=\{X\in\mathfrak{g};\sigma(X)=-X\}$. La paire $(\mathfrak{g},\mathfrak{h})$ est dite paire symétrique. On notera $\mathfrak{g}_\mathbb{C}$ l'algèbre de Lie complexifiée de $\mathfrak{g}$, et toujours par la même lettre $\sigma$ le prolongement par linéarité de $\sigma$ à $\mathfrak{g}_\mathbb{C}$. L'involution $\sigma$ ainsi définie se relève en une involution $\sigma$ du groupe adjoint

ISSN 0949–5932 / $2.50 

$G_{\mathbb{C}}$ de $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$. On note $H$ la composante neutre du groupe $G^\sigma$ des points fixes de $\sigma$ et $H_{\mathbb{C}}$ la composante neutre du groupe $G_{\mathbb{C}}^\sigma$. On rappelle que le groupe $H$ agit sur $\mathfrak{q}$. On dira que $X \in \mathfrak{g}$ est semi-simple si l'endomorphisme ad $X$ est semi-simple, c'est-à-dire diagonalisable sur $\mathbb{C}$. On rappelle qu'un sous-espace $\mathfrak{a}$ de $\mathfrak{q}$ est appelé sous-espace de Cartan de $\mathfrak{q}$ s'il est abélien, formé d'éléments semi-simples et s'il est maximal pour ces deux propriétés.Tous les sous-espaces de Cartan de $\mathfrak{q}$ ont la même dimension qu'on appelle le rang de $\mathfrak{q}$. Le nombre de classes de conjugaison sous $H$ de sous-espaces de Cartan est fini ([4]). Si $\mathfrak{a}$ est un sous-espace de Cartan de $\mathfrak{q}$, on notera $N(H,\mathfrak{a}) = \{g \in H; g\mathfrak{a} = \mathfrak{a}\}$, $Z(H,\mathfrak{a}) = \{g \in H; gX = X, \quad \forall X \in \mathfrak{a}\}$ et $W = W(H,\mathfrak{a}) = N(H,\mathfrak{a})/Z(H,\mathfrak{a})$.

Si on note Res: $\mathcal{C}^\infty(\mathfrak{q})^H \longrightarrow \mathcal{C}^\infty(\mathfrak{a})^W$ l'application de restriction de l'espace des fonctions $\mathcal{C}^\infty$ et $H$-invariantes sur $\mathfrak{q}$ dans l'espace des fonctions $\mathcal{C}^\infty$ et $W$-invariantes sur $\mathfrak{a}$, on sait [1] que dans le cas d'une paire symétrique riemanienne, cette restriction est un isomorphisme et on sait aussi [2] qu'en général, cette restriction n'est pas surjective. Le but de ce travail est de déterminer pour une paire symétrique quelconque, l'image de l'application Res ci-dessus (Théorème 4.1). Les outils fondamentaux de la démonstration sont: le théorème de prolongement de Whitney, le théorème de recollement de Lojasiewicz et le théorème 5.1 de [2] qui donne une condition nécessaire et suffisante pour qu'une fonction continue et $H$-invariante sur $\mathfrak{q}$ soit $\mathcal{C}^\infty$. Cette condition nécessaire et suffisante porte sur des propriétés de raccordement vérifiées par les restrictions d'une telle fonction aux différents sous-espaces de Cartan de $\mathfrak{q}$.

Je tiens à remercier A.Bouaziz pour ses encouragements.

## 1. Fonctions $\mathcal{C}^\infty$ invariantes sur l'espace tangent d'un espace symétrique.

Pour la commodité du lecteur et suivant une suggestion du referee, nous donnons un résumé de [2]. L'objet de ce travail est de donner une condition nécessaire et suffisante qui porte sur les restrictions aux différents sous-espaces de Cartan de $\mathfrak{q}$, pour qu'une fonction continue et $H$-invariante sur $\mathfrak{q}$ soit $\mathcal{C}^\infty$. Le résultat principal de [2] est

**Théoréme 1.1.** ([2], théorème 5.1) *Soit $f: \mathfrak{q} \longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction continue et $H$-invariante, alors $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathfrak{q})^H$ si et seulement si $f$ vérifie les deux propriétés suivantes:*
*i) Pour tout sous-espace de Cartan $\mathfrak{a}$ de $\mathfrak{q}$, $f_{|\mathfrak{a}}$ est $\mathcal{C}^\infty$ et $W(H,\mathfrak{a})$-invariante.*
*ii) Pour tout élément semi-simple $X$ de $\mathfrak{q}$, si $\mathfrak{a}$ et $\mathfrak{b}$ sont deux sous-espaces de Cartan de $\mathfrak{q}$ qui contiennent $X$ et si $h.X = X$ et $h.\mathfrak{a}_{\mathbb{C}} = \mathfrak{b}_{\mathbb{C}}$, alors pour tout $u$ dans $S(\mathfrak{a}_{\mathbb{C}})$*

$$(\partial(u).f_{|\mathfrak{a}})(X) = (\partial(h.u).f_{|\mathfrak{b}})(X).$$

Pour un sous-espace de Cartan $\mathfrak{a}$ de $\mathfrak{q}$, nous avons noté dans [2] $\mathcal{C}^\infty(\mathfrak{a})^{\mathrm{inv}}$ l'ensemble des fonctions $f: \mathfrak{a} \longrightarrow \mathbb{C}$ vérifiant
i) $f$ $\mathcal{C}^\infty$ et $W(H,\mathfrak{a})$-invariante.
ii) $\forall X \in \mathfrak{a}$, si $h \in N(H_{\mathbb{C}},\mathfrak{a}_{\mathbb{C}})$ et $h.X = X$, alors

$$\forall u \in S(\mathfrak{a}_{\mathbb{C}}) \qquad (\partial(u).f)(X) = (\partial(h.u).f)(X).$$

On a alors obtenu le corollaire suivant:

**Corollaire 1.2.** ([2], corollaire 7.1) *On suppose que dans* $\mathfrak{q}$*, il y ait une seule classe de conjugaison de sous-espaces de Cartan. Soit* $\mathfrak{a}$ *un sous-espace de Cartan de* $\mathfrak{q}$*, alors l'application de restriction de* $\mathcal{C}^\infty(\mathfrak{q})^H$ *dans* $\mathcal{C}^\infty(\mathfrak{a})^{\mathrm{inv}}$ *est un isomorphisme.*

Dans [2], nous avons aussi donné une description des fonctions continues $H$-invariantes sur $\mathfrak{q}$ en fonction de leurs restrictions aux différents sous-espaces de Cartan. On a le lemme suivant:

**Lemme 1.3.** ([2], lemme 6.1) *Notons* $\mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_r$ *des représentants des classes de conjugaison sous* $H$ *des sous-espaces de Cartan de* $\mathfrak{q}$*. Supposons que* $f_1, \ldots, f_r$ *soient des fonctions continues respectivement sur* $\mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_r$ *et vérifiant: pour tout* $i = 1, \ldots, r$*, tout* $X$ *dans* $\mathfrak{a}_i$ *et tout* $h \in H$ *tels que* $h.X \in \mathfrak{a}_j$*, on ait* $f_j(h.X) = f_i(X)$ *(en particulier* $f_i$ *est supposée* $W(H, \mathfrak{a}_i)$*-invariante). Alors, il existe une unique fonction* $f$ *continue et* $H$*-invariante sur* $\mathfrak{q}$ *telle que, pour tout* $i = 1, \ldots, r$ *, on ait* $f_{|\mathfrak{a}_i} = f_i$*.*

## 2. Fonctions $\mathcal{C}^\infty$ au sens de Whitney.

Si $E$ est un fermé de $\mathbb{R}^n$, un jet de Whitney d'ordre infini sur $E$ est la donnée d'une famille $(f^k)_{k\in\mathbb{N}^n}$ de fonctions numériques complexes continues sur $E$. On notera $J^\infty(E)$ l'ensemble de tous les jets de Whitney d'ordre infini sur $E$. L'ensemble $J^\infty(E)$ est naturellement muni d'une structure d'espace vectoriel. Si $E$ est compact, on définit un sous-espace $c^\infty(E)$ de $J^\infty(E)$ comme suit. Un élément $f$ de $J^\infty(E)$ appartient à $c^\infty(E)$ si et seulement si pour tout $m > 0$, pour tout $k \in \mathbb{N}^n$, $|k| \le m$, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que, pour tout $X, X_0 \in E, X \neq X_0$,

$$|X - X_0| < \delta \Rightarrow |f^k(X) - \sum_{|\ell|\le m-|k|} \frac{(X - X_0)^\ell}{\ell!} f^{k+\ell}(X_0)| < \varepsilon |X - X_0|^{m-|k|}.$$

Les éléments de $c^\infty(E)$ sont appelés fonctions $c^\infty$ au sens de Whitney sur $E$.

Si $E$ est un fermé quelconque de $\mathbb{R}^n$ et si $f \in J^\infty(E)$, on dira que $f$ est $c^\infty$ au sens de Whitney sur $E$ si, pour tout compact $K$ de $E$, $(f^k_{|K})_{k\in\mathbb{N}^n} \in c^\infty(K)$. On notera $c^\infty(E)$ l'espace des fonctions $c^\infty$ au sens de Whitney sur $E$.

**Remarque 2.1.** i) Si $E$ et $F$ sont deux fermés de $\mathbb{R}^n$, si $F \subset E$ et $f \in c^\infty(E)$, on notera $f_{\|F} = (f^k_{|F})_{k\in\mathbb{N}^n}$. Il est clair alors, d'après la définition, que $f_{\|F} \in c^\infty(F)$.

ii) On note $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$ l'espace des fonctions numériques complexes $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^n$. Si $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$, il découle de la formule de Taylor que le jet $(\frac{\partial^{|k|} f}{\partial x^k})_{k\in\mathbb{N}^n} \in c^\infty(\mathbb{R}^n)$.

D'après cette remarque, pour tout fermé $F$ de $\mathbb{R}^n$, on obtient une application $f \longmapsto f_{\|F}$ de $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$, identifié à un sous-espace de $c^\infty(\mathbb{R}^n)$, dans $c^\infty(F)$. Le théorème de prolongement de Whitney s'énonce comme suit.

**Théoréme 2.1.** [6] *Pour tout fermé $F$ de $\mathbb{R}^n$, l'application de restriction,*

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n) & \longrightarrow & c^\infty(F), \\ f & \longmapsto & (\frac{\partial^{|k|} f}{\partial x^k}_{|F})_{k\in\mathbb{N}^n}, \end{array}$$

*est surjective.*

**Corollaire 2.2.** *Si $n = p+q$, $p \geq 1$ et si $E = \mathbb{R}^p \times 0$ considéré comme sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$, alors si $(f^{(k,k')})_{(k,k')\in\mathbb{N}^n} \in J^\infty(E)$, le jet $(f^{(k,k')})_{(k,k')\in\mathbb{N}^n}$ est dans $c^\infty(E)$ si et seulement si*

*a) $f^{(k,k')}$ est une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $E$ pour tout $(k,k') \in \mathbb{N}^n$.*

*b) $\frac{\partial^{|\ell|}}{\partial x^\ell} f^{(k,k')} = f^{(k+\ell,k')}$ pour tout $\ell \in \mathbb{N}^p$ et pour tout $(k,k') \in \mathbb{N}^n$.*

**Démonstration.** La condition nécessaire découle immédiatement du théorème de prolongement de Whitney, théorème 2.1. Pour la condition suffisante, soit $f = (f^{(k,k')})_{(k,k')}$ un jet de $J^\infty(E)$. D'après la définition, $f \in c^\infty(E)$ si et seulement si, pour tout compact $K$ de $\mathbb{R}^p$, $\forall m > 0$, $\forall (k,k') \in \mathbb{N}^n$ et $|k| + |k'| \leq m$, $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$ tel que $\forall x$, $x_0 \in K$, $0 < |x - x_0| < \delta$, on ait

$$(1). \ |f^{(k,k')}(x) - \sum_{|(\ell,\ell')| \leq m-(|k|+|k'|)} \frac{(x-x_0,0)^{(\ell,\ell')}}{(\ell,\ell')!} f^{(k+\ell,k'+\ell')}(x_0)| < \varepsilon |x-x_0|^{m-|(k,k')|}$$

Or $(x - x_0, 0)^{(\ell,\ell')} = 0$ si $\ell' \neq 0$, donc (1) est équivalente à l'inégalité

$$(2). \qquad |f^{(k,k')}(x) - \sum_{|\ell| \leq m-(|k|+|k'|)} \frac{(x-x_0)^\ell}{\ell!} f^{(k+\ell,k')}(x_0)| < \varepsilon |x-x_0|^{m-|(k,k')|}$$

D'après b), cette inégalité devient

$$(3) \qquad |f^{(k,k')}(x) - \sum_{|\ell| \leq m-(|k|+|k'|)} \frac{(x-x_0)^\ell}{\ell!} \frac{\partial^{|\ell|}}{\partial x^\ell} f^{(k,k')}(x_0)| < \varepsilon |x-x_0|^{m-|(k,k')|}$$

Comme $f^{(k,k')}$ est une fonction $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^p$, (3) découle de la formule de Taylor appliquée à $f^{(k,k')}$. ■

**Définition 2.3.** *Soient $X$ et $Y$ deux fermés de $\mathbb{R}^n$ d'intersection non vide, $X$ et $Y$ sont dits régulièrement situés si, pour tout couple de compacts $(K, L)$ avec $K \subset X$, $L \subset Y$, il existe des constantes $C$, $\alpha > 0$ telles que , si $x \in K$, $d(x, L) > Cd(x, X \cap Y)^\alpha$.*

L'intérêt de la définition 2.3 vient du théorème de recollement de Lojasiewicz suivant.

**Théoréme 2.4.** ([6], p.83) *Soient $X$ et $Y$ deux fermés de $\mathbb{R}^n$ d'intersection non vide. Si $X$ et $Y$ sont régulièrement situés, alors la suite suivante est exacte:*

$$0 \longrightarrow c^\infty(X \cup Y) \xrightarrow{\delta} c^\infty(X) \oplus c^\infty(Y) \xrightarrow{\pi} c^\infty(X \cap Y) \longrightarrow 0$$

*où $\delta(f) = f_{\|X} + f_{\|Y}$ et $\pi(f_1 \oplus f_2) = f_{1\|_{X\cap Y}} - f_{2\|_{X\cap Y}}$.*

**Proposition 2.5.** ([6], p.88) *Deux ensembles analytiques réels $X$ et $Y$ d'intersection non vide sont toujours régulièrement situés.*

## 3. Les espaces "$\mathrm{Whit}_V(F)$"

On se propose dans ce paragraphe de présenter les résultats du paragraphe 2 sous une forme plus adaptée à nos besoins.

Si $V$ est un espace vectoriel de dimension finie sur $\mathbb{R}$, on note $S(V_\mathbb{C})$ l'algèbre symétrique de $V_\mathbb{C}$. Dans la suite on identifiera $S(V_\mathbb{C})$ à l'algèbre des opérateurs différentiels à coefficients complexes sur $V$. On notera $\partial(u)$ l'opérateur différentiel correspondant à $u \in S(V_\mathbb{C})$. Soit $F$ un fermé de $V$. On pose

$\mathrm{Whit}_V(F)$ = l'ensemble des familles $(\varphi(u))_{u\in S(V_\mathbb{C})}$; où $\varphi(u)\colon F \longrightarrow \mathbb{C}$ continue et telle qu'il existe une fonction $f$ de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $V$ vérifiant pour tout $u \in S(V_\mathbb{C})$, $\partial(u)f_{|F} = \varphi(u)$. D'après le théorème 2.1, l'espace $\mathrm{Whit}_V(F)$ s'identifie à $c^\infty(F)$ moyennant le choix d'une base de $V$.

Les deux lemmes suivants sont une retranscription du corollaire 2.2 et du théorème 2.4.

**Lemme 3.1.** *Si $F$ est un sous-espace vectoriel de $V$, l'application*

$$\begin{aligned} \mathrm{Hom}_{S(F_\mathbb{C})}(S(V_\mathbb{C}),\mathcal{C}^\infty(F)) &\longrightarrow \mathrm{Whit}_V(F),\\ \varphi &\longmapsto (\varphi(u))_{u\in S(V_\mathbb{C})}, \end{aligned}$$

*est un isomorphisme d'espaces vectoriels.*

**Lemme 3.2.** *Si $X$ et $Y$ sont deux ensembles analytiques de $V$, si $\varphi \in \mathrm{Whit}_V(X)$ et $\psi \in \mathrm{Whit}_V(Y)$ sont tels que, pour tout $u \in S(V_\mathbb{C})$, $\varphi(u)$ et $\psi(u)$ coïncident sur $X \cap Y$, alors l'application $\Phi$ définie sur $X \cup Y$ par $\Phi(u)_{|X} = \varphi(u)$ et $\Phi(u)_{|Y} = \psi(u)$ est un élément de $\mathrm{Whit}_V(X \cup Y)$.*

## 4. Théorème principal

Soit $\mathfrak{a}$ un sous-espace de Cartan de $\mathfrak{q}$. On note $\mathcal{C}^\infty(\mathfrak{a})^{\mathrm{inv}}$ l'espace des fonctions numériques complexes de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathfrak{a}$ vérifiant la propriété $(P)$ suivante.

$(P)$ pour tout $X \in \mathfrak{a}$, pour tout $h \in H$, pour tout $x \in H_\mathbb{C}$, tels que $hX \in \mathfrak{a}$, $x(hX) = hX$ et $x(h\mathfrak{a})_\mathbb{C} = \mathfrak{a}_\mathbb{C}$, on a : $\forall u \in S(\mathfrak{a}_\mathbb{C})$, $(\partial(xhu)f)(hX) = (\partial(u)f)(X)$

Avant d'énoncer le théorème principal, remarquons que, comme il est rappelé dans le paragraphe 1, ([2],paragraphe 7), il y a une autre définition de $\mathcal{C}^\infty(\mathfrak{a})^{\mathrm{inv}}$. La complication supplémentaire qui apparaît ici provient du fait qu'en général on peut avoir $X$ dans $\mathfrak{a}$, $h$ dans $H$, $h.X$ dans $\mathfrak{a}$ sans que $h.X$ ne soit dans l'orbite de $X$ sous l'action du groupe de Weyl $W(H,\mathfrak{a})$. Donnons un exemple de cette situation.

**Exemple 4.1.** On considère le cas du groupe de Lie $G = \mathrm{SL}(4,\mathbb{R})$ considéré comme espace symétrique. Alors $\mathfrak{q}$ s'identifie à $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(4,\mathbb{R})$ et $H$ s'identifie à $\mathrm{SL}(4,\mathbb{R})$ agissant dans $\mathfrak{g}$ par la représentation adjointe. Les sous-espaces de Cartan de $\mathfrak{q}$ sont les sous-algèbres de Cartan de $\mathfrak{sl}(4,\mathbb{R})$. Notons

$$\mathfrak{a} = \left\{ \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix} & 0 \\ 0 & \begin{pmatrix} a & -\nu \\ \nu & a \end{pmatrix} \end{pmatrix} \; ; \; 2a = -(\lambda+\mu) \right\}$$

$$\mathfrak{a}' = \left\{ \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} a & -\nu \\ \nu & a \end{pmatrix} & 0 \\ 0 & \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix} \end{pmatrix} \; ; \; 2a = -(\lambda+\mu) \right\}$$

Soit $X = \mathrm{diag}\,(1,1,-1,-1)$, on a $X \in \ \mathfrak{a} \cap \mathfrak{a}'$. Les parties déployées des sous-algèbres de Cartan $\mathfrak{a}$ et $\mathfrak{a}'$ étant de même dimension, on peut trouver $g \in \mathrm{SL}(4,\mathbb{R})$ tel que $g\mathfrak{a} = \mathfrak{a}'$ $([8], p.397)$, alors $X \in \mathfrak{a}'$ et $g.X \in \mathfrak{a}'$. S'il existait $w \in W(G,\mathfrak{a}')$ tel que $w.X = g.X$, on aurait $w^{-1}gX = X$ et donc $w^{-1}g \in H^X$= le centralisateur de $X$ dans $H$. Si on pose $x = w^{-1}g$, alors $x\ \mathfrak{a} = w^{-1}g\ \mathfrak{a} = w^{-1}\mathfrak{a}' = \mathfrak{a}'$. Donc $\mathfrak{a}$ et $\mathfrak{a}'$ seraient conjuguées par un élément du groupe $H^X$, ce qui est faux puisque $H^X$ opère dans son algèbre de Lie $\mathfrak{g}^X$ par automorphismes intérieurs. En effet, l'algèbre dérivée $\mathfrak{g}^X_{\mathrm{der}}$ de $\mathfrak{g}^X$ est $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{R}) \times \mathfrak{sl}(2,\mathbb{R})$, et si l'on note

$$\mathfrak{b} = \mathbb{R}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \text{et} \quad \mathfrak{t} = \mathbb{R}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

on a $\mathfrak{a} \cap \mathfrak{g}^X_{\mathrm{der}} = \mathfrak{b} \times \mathfrak{t}$ et $\mathfrak{a}' \cap \mathfrak{g}^X_{\mathrm{der}} = \mathfrak{t} \times \mathfrak{b}$. Il est bien connu que $\mathfrak{b} \times \mathfrak{t}$ et $\mathfrak{t} \times \mathfrak{b}$ ne sont pas conjuguées par un automorphisme intérieur de $\mathfrak{g}^X$.

Cependant les deux définitions de $\mathcal{C}^\infty(\mathfrak{a})^{\mathrm{inv}}$ coïncident si $\mathfrak{a}$ est un sous-espace de Cartan fondamental ou maximalement déployé.

Nous énonçons maintenant

**Théoréme 4.1.** *L'application de restriction* $\mathrm{Res}\colon \mathcal{C}^\infty(\mathfrak{q})^H \longrightarrow \mathcal{C}^\infty(\mathfrak{a})^{\mathrm{inv}}$ *est surjective.*

**Remarque 4.2.** i) Si $\sigma$ est une involution de Cartan, le théorème 4.1 permet de retrouver l'isomorphisme bien connu $\mathcal{C}^\infty(\mathfrak{p})^K \longrightarrow \mathcal{C}^\infty(\mathfrak{a})^W$.

ii) Si $W(H,\mathfrak{a}) = W(\mathfrak{g}_\mathbb{C},\mathfrak{a}_\mathbb{C})$, on a $\mathcal{C}^\infty(\mathfrak{a})^{\mathrm{inv}} = \mathcal{C}^\infty(\mathfrak{a})^W$ et la surjectivité resulte dans ce cas d'un théorème de Luna ([3]).

iii) L'application de restriction ci-dessus n'est injective que si tous les sous-espaces de Cartan de $\mathfrak{q}$ sont conjugués par $H$ ; dans ce cas la description de $\mathcal{C}^\infty(\mathfrak{a})^{\mathrm{inv}}$ est plus simple (voir paragraphe 1).

## 5. Démonstration du théorème 4.1

Nous noterons $\mathrm{Car}(\mathfrak{q})$ l'ensemble des sous-espaces de Cartan de $\mathfrak{q}$. Rappelons que si $\mathfrak{a} \in \mathrm{Car}(\mathfrak{q})$ et si $\lambda$ est une forme linéaire sur $\mathfrak{a}_\mathbb{C}$, on définit

$$\mathfrak{g}^\lambda_\mathbb{C} = \{X \in \mathfrak{g}_\mathbb{C}; \quad [A,X] = \lambda(A)X, \quad \forall A \in \mathfrak{a}_\mathbb{C}\}$$

$$\Sigma(\mathfrak{g}_\mathbb{C},\mathfrak{a}_\mathbb{C}) = \{\lambda \in \mathfrak{a}^*_\mathbb{C}; \quad \mathfrak{g}^\lambda_\mathbb{C} \neq 0\} \setminus \{0\},$$

alors $\Sigma(\mathfrak{g}_\mathbb{C},\, \mathfrak{a}_\mathbb{C})$ est un système de racines (voir [5], théorème 2.11). On notera $W(\mathfrak{g}_\mathbb{C},\mathfrak{a}_\mathbb{C})$ le groupe de Weyl associé. Rappelons aussi que

$$W(\mathfrak{g}_\mathbb{C},\mathfrak{a}_\mathbb{C}) = N(H_\mathbb{C},\mathfrak{a}_\mathbb{C})/Z(H_\mathbb{C},\mathfrak{a}_\mathbb{C}).$$

On note $\mathcal{F}$ l'ensemble des sous-espaces $F$ de $\mathfrak{q}$ tels qu'il existe $X \in \mathfrak{q}$ semi-simple pour lequel $F = (\mathrm{centre}\,\mathfrak{g}^X) \cap \mathfrak{q}$. On notera $\{m_0, m_1, \ldots, m_k\}$ l'ensemble

$\{\dim F; \quad F \in \mathcal{F}\}$ et on supposera que $m_0 < m_1 < \ldots < m_k$. Pour $j \in \{0, 1, \ldots, k\}$, on notera

$$\mathcal{F}_j = \{F \in \mathcal{F}; \quad \dim F \leq m_j\}$$

Alors $\mathcal{F}_0$ contient le seul élement $F_0 = (\text{centre}\,\mathfrak{g}) \cap \mathfrak{q}$.

**Lemme 5.1.** i) *On a* $\text{Car}(\mathfrak{q}) \subset \mathcal{F}$.

ii) *Pour tout* $F \in \mathcal{F}$, *il existe* $\mathfrak{b} \in \text{Car}(\mathfrak{q})$ *tel que* $F \subset \mathfrak{b}$.

iii) *Si* $\mathfrak{b} \in \text{Car}(\mathfrak{q})$, *les sous-espaces de* $\mathfrak{b}$ *qui appartiennent à* $\mathcal{F}$ *sont exactement ceux qui sont de la forme* $(\bigcap_{\alpha \in \Sigma_1} \text{Ker}\,\alpha) \cap \mathfrak{b}$ *où* $\Sigma_1 \subset \Sigma(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}, \mathfrak{b}_{\mathbb{C}})$.

iv) *Si* $F_1$, $F_2 \in \mathcal{F}$, *alors* $F_1 \cap F_2 \in \mathcal{F}$.

v) *Pour tout* $F \in \mathcal{F}$, *le cardinal de l'ensemble des éléments de* $\mathcal{F}$ *contenus dans* $F$ *est fini.*

**Démonstration.** i) Soient $\mathfrak{b} \in \text{Car}(\mathfrak{q})$ et $X \in \mathfrak{b}$ tel que $\lambda(X) \neq 0$ pour tout $\lambda \in \Sigma(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}, \mathfrak{b}_{\mathbb{C}})\}$, alors ([7] ,1.11) $\mathfrak{b} = \mathfrak{q}^X = (\text{centre}\,\mathfrak{g}^X) \cap \mathfrak{q} \in \mathcal{F}$.

ii) Soit $F \in \mathcal{F}$. Il existe donc $X \in \mathfrak{q}$ semi-simple tel que $F = (\text{centre}\,\mathfrak{g}^X) \cap \mathfrak{q}$. Le sous-espace centre $\mathfrak{g}^X$ est formé d'éléments semi-simples et est abélien, donc $(\text{centre}\,\mathfrak{g}^X) \cap \mathfrak{q}$ aussi; celui-ci est inclu dans un sous-espace de $\mathfrak{q}$ maximal pour ces deux propriétés; c'est-à-dire un sous-espace de Cartan de $\mathfrak{q}$.

iii) Soient $F \in \mathcal{F}$ et soit $X$ semi-simple dans $\mathfrak{q}$ tel que $F = (\text{centre}\,\mathfrak{g}^X) \cap \mathfrak{q}$. Soit $\mathfrak{b} \in \text{Car}(\mathfrak{q})$ tel que $F \subset \mathfrak{b}$. Notons $\Sigma_F = \{\alpha \in \Sigma(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}, \mathfrak{b}_{\mathbb{C}}); \quad \alpha|F = 0\}$. Soit $Y \in F$ tel que $\alpha(Y) \neq 0$, pour tout $\alpha \in \Sigma(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}, \mathfrak{b}_{\mathbb{C}}) \setminus \Sigma_F$. L'élément $Y$ étant semi-simple, $\mathfrak{g}^Y$ est alors réductive et invariante par $\sigma$ et $(\mathfrak{g}^Y, \mathfrak{g}^Y \cap \mathfrak{h})$ est une paire symétrique ([7], 1.5), $\mathfrak{b}$ est un sous-espace de Cartan de $\mathfrak{q}^Y$ et $\Sigma(\mathfrak{g}^Y_{\mathbb{C}}, \mathfrak{b}_{\mathbb{C}}) = \Sigma_F$. Par suite

$$(\bigcap_{\alpha \in \Sigma_F} \text{Ker}\,\alpha) \cap \mathfrak{q} = (\text{centre}\,\mathfrak{g}^Y_{\mathbb{C}}) \cap \mathfrak{q} = (\text{centre}\,\mathfrak{g}^Y) \cap \mathfrak{q}.$$

Or $F \subset (\bigcap_{\alpha \in \Sigma_F} \text{Ker}\,\alpha) \cap \mathfrak{q}$ et centre $\mathfrak{g}^Y \subset$ centre $\mathfrak{g}^X$, car $\mathfrak{g}^X \subset \mathfrak{g}^Y$ puisque $Y$ appartient au centre de $\mathfrak{g}^X$. Donc $F = (\bigcap_{\alpha \in \Sigma_F} \text{Ker}\,\alpha) \cap \mathfrak{b}$.

Réciproquement, soient $\Sigma_1 \subset \Sigma(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}, \mathfrak{b}_{\mathbb{C}})$ et $F = \bigcap_{\alpha \in \Sigma_1} \text{Ker}\,\alpha) \cap \mathfrak{b}$. Soit $\Sigma'_1 = \{\alpha \in \Sigma(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}, \mathfrak{b}_{\mathbb{C}}); \quad \alpha_{|F} = 0\}$. Alors $F = (\bigcap_{\alpha \in \Sigma'_1} \text{Ker}\,\alpha) \cap \mathfrak{b}$. Soit $X \in F$ tel que $\alpha(X) \neq 0$ pour tout $\alpha \in \Sigma(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}, \mathfrak{b}_{\mathbb{C}}) \setminus \Sigma'_1$, alors la démonstration ci-dessus montre que $F(\text{centre}\,\mathfrak{g}^X) \cap \mathfrak{q}$, et donc $F \in \mathcal{F}$.

iv) Supposons $F_i = (\text{centre}\,\mathfrak{g}^{X_i}) \cap \mathfrak{q}$, $i = 1, 2$. Soit $\mathfrak{b} \in \text{Car}(\mathfrak{q})$ tel que $F_1 \subset \mathfrak{b}$; alors $F = F_1 \cap F_2 \subset \mathfrak{b}$. Soient $\Sigma_F = \{\alpha \in \Sigma(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}, \mathfrak{b}_{\mathbb{C}}); \quad \alpha|F = 0\}$ et $F' = \{X \in F; \quad \forall \beta \in \Sigma(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}, \mathfrak{b}_{\mathbb{C}}), \quad \beta(X) = 0 \Longrightarrow \beta \in \Sigma_F\}$. Si $X \in F'$ ; on a $(\text{centre}\,\mathfrak{g}^X) \cap \mathfrak{q} \supset F$. Or centre $\mathfrak{g}^{X_i} \supset$ centre $\mathfrak{g}^X$ car $\mathfrak{g}^X \supset \mathfrak{g}^{X_i}$ du fait que $X$ soit dans le centre de $\mathfrak{g}^{X_i}$, donc $F_1 \cap F_2 = F \supset (\text{centre}\,\mathfrak{g}^X) \cap \mathfrak{q} \supset F$; par suite $F = (\text{centre}\,\mathfrak{g}^X) \cap \mathfrak{q}$.

v) Découle de iii). ∎

**Lemme 5.2.** i) *Soient* $F \in \mathcal{F}$, $\mathfrak{b} \in \text{Car}(\mathfrak{q})$, $\mathfrak{b}' \in \text{Car}(\mathfrak{q})$ *tels que* $F \subset \mathfrak{b} \cap \mathfrak{b}'$. *Alors il existe* $x \in H^F_{\mathbb{C}} = \{g \in H_{\mathbb{C}}, gZ = Z; \quad Z \in F\}$ *tel que* $x\mathfrak{b}_{\mathbb{C}} = \mathfrak{b}'_{\mathbb{C}}$.

ii) *Si* $X \in \mathfrak{q}$ *semi-simple et* $F = (\text{centre}\,\mathfrak{g}^X) \cap \mathfrak{q}$, *alors* $H^X_{\mathbb{C}} = H^F_{\mathbb{C}}$.

**Démonstration.** i) Par définition il existe $X_0 \in F$ tel que $F \subset \text{centre}\,\mathfrak{g}^{X_0}$. Alors $H_{\mathbb{C}}^{X_0}$ étant connexe, $H_{\mathbb{C}}^{X_0} \subset H_{\mathbb{C}}^{Z}$ pour tout $Z \in \text{centre}\,\mathfrak{g}^{X_0}$; donc $H_{\mathbb{C}}^{X_0} = H_{\mathbb{C}}^{F}$. Comme $\mathfrak{h}_{\mathbb{C}}^{X_0}$ est réductive complexe ([7], 1.5), $\mathfrak{b}_{\mathbb{C}}$ et $\mathfrak{b}'_{\mathbb{C}}$ sont deux sous-espaces de Cartan de $\mathfrak{q}_{\mathbb{C}}^{X_0}$, et il existe $x \in H_{\mathbb{C}}^{X_0}$ tel que $x\mathfrak{b}_{\mathbb{C}} = \mathfrak{b}'_{\mathbb{C}}$.

ii) Soient $X \in \mathfrak{q}$ semi-simple et $F = (\text{centre}\,\mathfrak{g}^X) \cap \mathfrak{q}$. Alors $F \in \mathcal{F}$ et d'après la démonstration de i), on a $H_{\mathbb{C}}^{X} = H_{\mathbb{C}}^{F}$. ∎

**Proposition 5.3.** *Soit $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathfrak{q})^H$, $F \in \mathcal{F}$ et $\mathfrak{b} \in \text{Car}(\mathfrak{q})$ tel que $F \subset \mathfrak{b}$. On pose, pour $u \in S(\mathfrak{b}_{\mathbb{C}})$, $\varphi_{\mathfrak{b},F}(u) = \partial(u)f_{|F}$. Alors on a les propriétés suivantes:*

$\mathbf{P_1}$. $\varphi_{\mathfrak{b},F} \in \text{Whit}_{\mathfrak{b}}(F)$.

$\mathbf{P_2}$. *Pour tout $g \in H$, $X \in F$ et $u \in S(\mathfrak{b}_{\mathbb{C}})$,*

$$\varphi_{g\mathfrak{b},gF}(g.u)(gX) = \varphi_{\mathfrak{b},F}(u)(X).$$

$\mathbf{P_3}$. *Pour tout $F \in \mathcal{F}$, $\mathfrak{b}, \mathfrak{b}' \in$ $\text{Car}(\mathfrak{q})$ tels que $F \subset \mathfrak{b}$, $F \subset \mathfrak{b}'$, si $x \in H_{\mathbb{C}}^F$ et $x.\mathfrak{b}_{\mathbb{C}} = \mathfrak{b}'_{\mathbb{C}}$, on a*

$$\forall u \in S(\mathfrak{b}_{\mathbb{C}}), \quad \varphi_{\mathfrak{b}',F}(x.u) = \varphi_{\mathfrak{b},F}(u).$$

$\mathbf{P_4}$. *Si $F, F' \in \mathcal{F}$, $\mathfrak{b} \in \text{Car}(\mathfrak{q})$ et $F' \subset F \subset \mathfrak{b}$, alors*

$$\forall u \in S(\mathfrak{b}_{\mathbb{C}}), \quad \varphi_{\mathfrak{b},F'}(u) = \varphi_{\mathfrak{b},F}(u)_{|F'}.$$

*Réciproquement, si pour tout $F \in \mathcal{F}$ et tout $\mathfrak{b} \in \text{Car}(\mathfrak{q})$ contenant $F$, on se donne $\varphi_{\mathfrak{b},F} : S(\mathfrak{b}_{\mathbb{C}}) \longrightarrow c^\infty(F)$ vérifiant les propriétés $\mathbf{P_1}, \ldots, \mathbf{P_4}$, alors il existe une unique fonction $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathfrak{q})^H$ telle que*

$$\varphi_{\mathfrak{b},F}(u) = \partial(u)f_{|F}, \quad \forall u \in S(\mathfrak{b}_{\mathbb{C}}), \quad \forall F \in \mathcal{F} \ \textit{et} \ \ \forall \mathfrak{b} \in \text{Car}(\mathfrak{q})$$

*tels que $\mathfrak{b} \supset F$.*

**Démonstration.** Si $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathfrak{q})^H$, il est clair que $\mathbf{P_1}, \mathbf{P_2}, \mathbf{P_4}$ sont vérifiées. La propriété $\mathbf{P_3}$ découle de la condition nécessaire du théorème 5.1 de [2].

Pour la réciproque, soit $\mathfrak{b} \in \text{Car}(\mathfrak{q})$; d'après $\mathbf{P_1}$ et le lemme 3.1, $\varphi_{\mathfrak{b},\mathfrak{b}}(1) \in \mathcal{C}^\infty(\mathfrak{b})$. D'après $\mathbf{P_2}$, $\mathbf{P_4}$ et le lemme 5.1.(i et iv), les fonctions $\varphi_{\mathfrak{b},\mathfrak{b}}(1)$, $\mathfrak{b} \in \text{Car}(\mathfrak{q})$, vérifient le lemme 1.3, par suite il existe une fonction continue et $H$-invariante unique $f\colon \mathfrak{q} \longrightarrow \mathbb{C}$ telle que, pour tout $\mathfrak{b} \in \text{Car}(\mathfrak{q})$, $f_{|\mathfrak{b}} = \varphi_{\mathfrak{b},\mathfrak{b}}(1)$. Pour montrer que $f$ est $\mathcal{C}^\infty$, nous allons utiliser le théorème 1.1. Pour ceci, nous avons à vérifier les deux propriétés suivantes :

i) Pour tout sous-espace de Cartan $\mathfrak{b} \in \text{Car}(\mathfrak{q})$, $f_{|\mathfrak{b}}$ est $\mathcal{C}^\infty$ et $W(H,\mathfrak{b})$-invariante.

ii) Si $X \in \mathfrak{q}$ est semi-simple, si $\mathfrak{b}, \mathfrak{b}' \in \text{Car}(\mathfrak{q})$ et contiennent $X$, alors pour $x \in H_{\mathbb{C}}$, $x.X = X$ et $x\mathfrak{b}_{\mathbb{C}} = \mathfrak{b}'_{\mathbb{C}}$, on a

$$\forall u \in S(\mathfrak{b}_{\mathbb{C}}), \quad (\partial(x.u)f_{|\mathfrak{b}'})(X) = (\partial(u)f_{|\mathfrak{b}})(X).$$

Or la propriété i) est clairement vérifiée par $f$, puisque pour tout $\mathfrak{b} \in \text{Car}(\mathfrak{q})$, $f_{|\mathfrak{b}} = \varphi_{\mathfrak{b},\mathfrak{b}}(1) \in \mathcal{C}^\infty(\mathfrak{b})$ et comme $\varphi_{\mathfrak{b},\mathfrak{b}}$ vérifie $\mathbf{P_2}$, $f_{|\mathfrak{b}}$ est $W(H,\mathfrak{b})$-invariante. Si $X$ est semi-simple dans $\mathfrak{q}$, si $\mathfrak{b}, \mathfrak{b}'$ sont dans $\text{Car}(\mathfrak{q})$ et contiennent $X$, si $x \in H_{\mathbb{C}}$

tel que $x.X = X$ et $x\mathfrak{b}_\mathbb{C} = \mathfrak{b}'_\mathbb{C}$, soit $F = (\text{centre}\,\mathfrak{g}^X) \cap \mathfrak{q}$; alors on a $F \in \mathcal{F}$, $F \subset \mathfrak{b} \cap \mathfrak{b}'$ et $x \in H_\mathbb{C}^F$ (lemme 5.2). Par $\mathbf{P_3}$, on a donc $\varphi_{\mathfrak{b}',F}(x.u) = \varphi_{\mathfrak{b},F}(u)$ pour tout $u \in S(\mathfrak{b}_\mathbb{C})$. Pour obtenir la propriété (ii), il reste à vérifier que pour tout $F$ de $\mathcal{F}$, pour tout $\mathfrak{b} \in \mathrm{Car}(\mathfrak{q})$ tel que $F \subset \mathfrak{b}$ et pour tout $u \in S(\mathfrak{b}_\mathbb{C})$, $\varphi_{\mathfrak{b},F}(u) = \partial(u) f_{|F}$. Or d'après $\mathbf{P_4}$, il suffit de le vérifier pour $F = \mathfrak{b}$, et comme $\varphi_{\mathfrak{b},\mathfrak{b}} \in \mathrm{Whit}_\mathfrak{b}(\mathfrak{b}) = \mathrm{Hom}_{S(\mathfrak{b}_\mathbb{C})}(S(\mathfrak{b}_\mathbb{C}), \mathcal{C}^\infty(\mathfrak{b})) \simeq \mathcal{C}^\infty(\mathfrak{b})$, on a

$$\varphi_{\mathfrak{b},\mathfrak{b}}(u) = \partial(u).\varphi_{\mathfrak{b},\mathfrak{b}}(1) = \partial(u) f_{|\mathfrak{b}} \qquad \forall u \in S(\mathfrak{b}_\mathbb{C}).$$

Ceci termine la démonstration de la proposition 5.3. ■

Il s'ensuit que le théorème 4.1 découle de la proposition suivante.

**Proposition 5.4.** *Soit $\mathfrak{a}$ un sous-espace de Cartan de $\mathfrak{q}$ et soit $\theta \in \mathcal{C}^\infty(\mathfrak{a})^{\mathrm{inv}}$, alors on peut définir une famille d'applications $\varphi_{\mathfrak{b},F}\colon S(\mathfrak{b}_\mathbb{C}) \longrightarrow c^\infty(F)$, avec $\mathfrak{b} \in \mathrm{Car}(\mathfrak{q})$, $F \in \mathcal{F}$ tel que $F \subset \mathfrak{b}$, vérifiant les propriétés $\mathbf{P_1}, \dots, \mathbf{P_4}$ de 5.3 et tels que*

$$(*) \qquad \text{Si } F \subset \mathfrak{a}, \qquad \varphi_{\mathfrak{a},F}(u) = \partial(u)\theta_{\ |F} \qquad \forall\ u \in S(\mathfrak{a}_\mathbb{C})$$

**Démonstration.** La définition des applications $\varphi_{\mathfrak{b},F}$ va être faite par récurrence sur la dimension de $F$. Remarquons que $\mathcal{F}_0$ est réduit au seul élément $F_0$,

$$F_0 = \text{centre}\,\mathfrak{g} \cap \mathfrak{q}$$

et $\dim F_0 = m_0$. Soit $\mathfrak{b} \in \mathrm{Car}(\mathfrak{q})$, alors $F_0 \subset \mathfrak{b}$. Soit $x \in H_\mathbb{C}$ tel que $x\mathfrak{b}_\mathbb{C} = \mathfrak{a}_\mathbb{C}$. Pour tout $u \in S(\mathfrak{b}_\mathbb{C})$, on pose

$$\varphi_{\mathfrak{b},F_0}(u) = \partial(x \cdot u)\theta_{|F_0}$$

Alors $\varphi_{\mathfrak{b},F_0}$ est bien définie ; en effet si $y \in H_\mathbb{C}$ et $y\mathfrak{b}_\mathbb{C} = \mathfrak{a}_\mathbb{C}$, alors $xy^{-1}.\mathfrak{a}_\mathbb{C} = \mathfrak{a}_\mathbb{C}$ et, comme $H_\mathbb{C}$ fixe les éléments de $F_0$, d'après la définition de $\mathcal{C}^\infty(\mathfrak{a})^{\mathrm{inv}}$,

$$\forall u \in S(\mathfrak{b}_\mathbb{C}) \text{ et } \forall X \in F_0\ ,\ \partial(x \cdot u)\theta(X) = \partial(xy^{-1}y \cdot u)\theta(X) = \partial(y \cdot u)\theta(X).$$

Il est clair que,

$$\forall u \in S(\mathfrak{b}_\mathbb{C}), \quad \varphi_{\mathfrak{b},F_0}(u) \in c^\infty(F_0);$$

de plus, si $u_0 \in S(F_{0\mathbb{C}})$,

$$\varphi_{\mathfrak{b},F_0}(u_0 u) = \partial(x \cdot u_0 u)\theta_{|F_0} = \partial(u_0).\varphi_{\mathfrak{b},F_0}(u),$$

donc $\varphi_{\mathfrak{b},F_0} \in \mathrm{Hom}_{S(F_{0\mathbb{C}})}(S(\mathfrak{b}_\mathbb{C}),\ c^\infty(F_0)) = \mathrm{Whit}_\mathfrak{b}(F_0)$.

Il est immédiat que les propriétés $\mathbf{P_1}, \dots,\ \mathbf{P_4}$, ainsi que la propriété $(*)$ sont vérifiées par les applications $\varphi_{\mathfrak{b},F_0}$, $\mathfrak{b} \in\ \mathrm{Car}(\mathfrak{q})$.

Soit $i$ fixé dans $\{0, 1, \dots, k-1\}$. On rappelle que $\mathcal{F}_i$ désigne l'ensemble des $F \in \mathcal{F}$ tels que $\dim\ F \leq m_i$. Supposons qu'on ait défini une famille d'applications $\varphi_{\mathfrak{b},F} \in \mathrm{Whit}_\mathfrak{b}(F), F \in \mathcal{F}_i, \mathfrak{b} \in \mathrm{Car}(\mathfrak{q})$ et $F \subset \mathfrak{b}$, vérifiant les propriétés $P_1, \dots, P_4$ de la proposition 5.3, où l'on a remplacé $\mathcal{F}$ par $\mathcal{F}_i$, et tels que

$$(*) \qquad \text{si } F \in \mathcal{F}_i \text{ et } \quad F \subset \mathfrak{a}, \text{ on a } \quad \varphi_{\mathfrak{a},F}(u) = \partial(u)\theta_{|F} \quad \forall u \in S(\mathfrak{a}_\mathbb{C}).$$

Nous allons construire les applications $\varphi_{\mathfrak{b},F}, F \in \mathcal{F}_{i+1} \setminus \mathcal{F}_i$. Remarquons que si $L_1, L_2 \in \mathcal{F}_{i+1} \setminus \mathcal{F}_i$ ne sont pas conjugués par $H$, alors la vérification, par la famille $\varphi_{\mathfrak{b},F}, F \in \mathcal{F}_{i+1}$, des propriétés $\mathbf{P_1}, \ldots, \mathbf{P_4}$ et $(*)$ ne fait intervenir aucune relation directe entre deux applications $\varphi_{\mathfrak{b}_1,L_1}$ et $\varphi_{\mathfrak{b}_2,L_2}$; ceci nous permet de faire la construction par blocs, en ne considérant à la fois que les $F \in \mathcal{F}_{i+1} \setminus \mathcal{F}_i$ qui sont conjugués par $H$.

Soit $F \in \mathcal{F}_{i+1} \setminus \mathcal{F}_i$. On note $\mathrm{conj}(F) = \{gF, g \in H\}$. On distinguera deux cas, suivant que $\mathrm{conj}(F)$ contient un sous-espace de $\mathfrak{a}$ ou non.

**Premier cas:** La classe $\mathrm{conj}(F)$ contient un sous-espace de $\mathfrak{a}$.

On note $\mathcal{E} = \{(g, E)|\ g \in H, E \in \mathrm{conj}(F), gE \subset \mathfrak{a}\}$. Pour tout $(g, E) \in \mathcal{E}$, $\mathfrak{b} \in \mathrm{Car}(\mathfrak{q})$ tel que $E \subset \mathfrak{b}$ , $x \in H_{\mathbb{C}}^{gE}$ tel que $x(g\mathfrak{b})_{\mathbb{C}} = \mathfrak{a}_{\mathbb{C}}$ (cf. lemme 5.2), $u \in S(\mathfrak{b}_{\mathbb{C}})$ et pour tout $X \in E$ posons

$$\varphi_{\mathfrak{b},E}(u)(X) = (\partial(xg \cdot u)\theta)(gX)$$

Vérifions que $\varphi_{\mathfrak{b},E}$ est bien définie. Soient $(g_1, E)$, $(g_2, E) \in \mathcal{E}$, $\mathfrak{b} \in \mathrm{Car}(\mathfrak{q})$, $x_1 \in H_{\mathbb{C}}^{g_1E}$, $x_2 \in H_{\mathbb{C}}^{g_2E}$ tels que $E \subset \mathfrak{b}$, $x_1(g_1\mathfrak{b})_{\mathbb{C}} = \mathfrak{a}_{\mathbb{C}}$ et $x_2(g_2\mathfrak{b})_{\mathbb{C}} = \mathfrak{a}_{\mathbb{C}}$. Posons $g_3 = g_1g_2^{-1}$ et $x_3 = x_1g_3x_2^{-1}g_3^{-1}$. Soit $X \in E$, alors $g_2X \in \mathfrak{a}$ et $g_3(g_2X) = g_1X \in \mathfrak{a}$. On a aussi $x_3(g_1X) = g_1X$ et $x_3(g_3\mathfrak{a})_{\mathbb{C}} = \mathfrak{a}_{\mathbb{C}}$. Par suite, comme $\theta \in \mathcal{C}^\infty(\mathfrak{a})^{\mathrm{inv}}$,

$$\forall u \in S(\mathfrak{b}_{\mathbb{C}}), \quad \partial(x_1g_1 \cdot u))\theta(g_1X) = \partial(x_3g_3(x_2g_2 \cdot u))\theta(g_3g_2X) = \partial(x_2g_2u)\theta(g_2X).$$

Montrons maintenant que les applications ainsi définies vérifient les propriétés $\mathbf{P_1}, \ldots, \mathbf{P_4}$ et la propriété supplémentaire $(*)$.

La propriété $(*)$ est vérifiée, puisque si $E \subset \mathfrak{a}$, $\varphi_{\mathfrak{a},E}(u) = \partial(u)\theta_{|E}$.

$\mathbf{P_1}$. Remarquons que les applications $\varphi_{\mathfrak{b},E}(u), u \in S(\mathfrak{b}_{\mathbb{C}})$, sont des applications $\mathcal{C}^\infty$ sur E. Soient $(g, E) \in \mathcal{E}, \mathfrak{b} \in \mathrm{Car}(\mathfrak{q})$ tels que $E \subset \mathfrak{b}$, et soit $x \in H_{\mathbb{C}}^{gE}$ tel que $x(g\mathfrak{b})_{\mathbb{C}} = \mathfrak{a}_{\mathbb{C}}$. Soient $Z \in E, u \in S(\mathfrak{b}_{\mathbb{C}})$ et $X \in E$. Alors

$$\begin{aligned}
\varphi_{\mathfrak{b},E}(Zu)(X) &= \partial(x \cdot (gZu))\theta(gX) \\
&= \partial((xg \cdot Z)(xg \cdot u))\theta(gX) \\
&= \partial(xg \cdot Z)\partial(xg \cdot u)\theta(gX) \\
&= \partial(Z)\partial(xg \cdot u)\theta(gY)(X), \qquad \text{car } x \in H_{\mathbb{C}}^{gE} \\
&= \partial(Z)\varphi_{\mathfrak{b},E}(u)(X).
\end{aligned}$$

Donc $\varphi_{\mathfrak{b},E} \in \mathrm{Hom}_{S(E_{\mathbb{C}})}(S(\mathfrak{b}_{\mathbb{C}}), \mathcal{C}^\infty(E)) = \mathrm{Whit}_{\mathfrak{b}}\ (E)$.

$\mathbf{P_2}$. Soient $(g_0, E) \in \mathcal{E}$, $\mathfrak{b} \in \mathrm{Car}(\mathfrak{q})$, $E \subset \mathfrak{b}$, et $x \in H_{\mathbb{C}}^{g_0E}$ tels que $x(g_0\mathfrak{b})_{\mathbb{C}} = \mathfrak{a}_{\mathbb{C}}$. Soit $g \in H$, alors, comme $(g_0g^{-1})g.E \subset \mathfrak{a}$, $x \in H_{\mathbb{C}}^{(g_0g^{-1})gE}$ et $(x\, g_0\, g^{-1})(g\mathfrak{b})_{\mathbb{C}} = \mathfrak{a}_{\mathbb{C}}$, on a par définition: pour tout $u \in S(\mathfrak{b}_{\mathbb{C}})$, $X \in E$,

$$\varphi_{g\mathfrak{b},gE}(g.u)(g.X) = \partial(xg_0\ g^{-1}.gu)\theta\ (g_0X) = \partial(xg_0u)\theta(g_0X) = \varphi_{\mathfrak{b},E}(u)(X).$$

$\mathbf{P_3}$. Soient $(g_0,\ E) \in \mathcal{E}$ , $\mathfrak{b}, \mathfrak{b}' \in \mathrm{Car}(\mathfrak{q})$ tels que $E \subset \mathfrak{b}$, $E \subset \mathfrak{b}'$, et soit $y \in H_{\mathbb{C}}^E$ tel que $y\mathfrak{b}_{\mathbb{C}} = \mathfrak{b}'_{\mathbb{C}}$ (voir lemme 5.2). Soit $x' \in H_{\mathbb{C}}^{g_0E}$ tel que $x'(g_0\mathfrak{b}')_{\mathbb{C}} = \mathfrak{a}_{\mathbb{C}}$. Alors, si on pose $x = x'g_0y\ g_0^{-1}$, $x \in H_{\mathbb{C}}^{g_0E}$ et $xg_0\mathfrak{b}_{\mathbb{C}} = \mathfrak{a}_{\mathbb{C}}$. Par suite, pour tout $u \in S(\mathfrak{b}_{\mathbb{C}})$

et pour tout $X \in E$, par définition de $\varphi_{\mathfrak{b}',E}$,

$$\begin{aligned}\varphi_{\mathfrak{b}',E}(y\cdot u)(X) &= (\partial(x'\ g_0 y\cdot u)\theta)(g_0\ X)\\ &= (\partial(x\ g_0\cdot u)\theta)(g_0 X)\\ &= \varphi_{\mathfrak{b},E}(u)(X).\end{aligned}$$

$\mathbf{P_4}$. Soit $E \in \mathrm{conj}(F)$ et soit $E' \in \mathcal{F}$ tels que $E' \subset E$ et $\dim E' \leq m_i$. Soient $\mathfrak{b} \in \mathrm{Car}(\mathfrak{q})$, $g_0 \in H$ et $x \in H_{\mathbb{C}}^{g_0 E}$ tels que $E \subset \mathfrak{b}$, $g_0 E \subset \mathfrak{a}$ et $x g_0 \cdot \mathfrak{b}_{\mathbb{C}} = \mathfrak{a}_{\mathbb{C}}$. Alors, pour tout $u \in S(\mathfrak{b}_{\mathbb{C}})$ et pour tout $X \in E'$,

$$\begin{aligned}\varphi_{\mathfrak{b},E'}(u)(X) &= \varphi_{g_0\mathfrak{b},g_0E'}(g_0\cdot u)(g_0X) && (\mathbf{P_2} \text{ de l'hypothèse de récurrence})\\ &= \varphi_{\mathfrak{a},g_0E'}(x\ g_0\cdot u)(g_0X) && (\mathbf{P_3} \text{ de l'hypothèse de récurrence})\\ &= \partial(x\ g_0\cdot u)\theta(g_0X) && (\text{propriété } (*) \text{ de l'hypothèse de récurrence})\\ &= \varphi_{\mathfrak{b},E}(u)(X) && (\text{par définition de } \varphi_{\mathfrak{b},E}).\end{aligned}$$

**Deuxième Cas:** La classe $\mathrm{conj}(F)$ ne contient pas de sous-espace de $\mathfrak{a}$.

Notons $F_1, \ldots, F_r$ tous les sous-espaces stricts de $F$ qui appartiennent à $\mathcal{F}$. Ces sous-espaces sont en nombre fini d'après le lemme 5.1(v). D'après l'hypothèse de récurrence, les fonctions $\varphi_{\mathfrak{b},F_j}$ sont définies si $\mathfrak{b}$ est un sous-espace de Cartan de $\mathfrak{q}$ contenant $F_j$, $j = 1, \ldots, r$.

Soit $\mathfrak{b}_0 \in \mathrm{Car}(\mathfrak{q})$ fixé tel que $F \subset \mathfrak{b}_0$. Comme l'intersection de deux éléments de l'ensemble $\{F_1, F_2, \cdots, F_r\}$ est encore un élement de cet ensemble, la propriété $\mathbf{P_4}$ de l'hypothèse de récurrence permet de définir, pour tout $u \in S(\mathfrak{b}_{0\mathbb{C}})$, l'application

$$\begin{aligned}\psi_1(u):\qquad \textstyle\bigcup_{j=1}^r\ F_j &\longrightarrow \mathbb{C},\\ X \in F_j &\longmapsto \varphi_{\mathfrak{b}_0,F_j}(u)(X).\end{aligned}$$

Alors, d'après le lemme 3.2, $\psi_1 \in \mathrm{Whit}_{\mathfrak{b}_0}\ (\bigcup_{j=1}^{r} F_j)$ et, d'après le lemme 3.1, il existe $\psi \in \mathcal{C}^\infty(\mathfrak{b}_0)$ telle que

$$\forall u \in S(\mathfrak{b}_{0\mathbb{C}}), \quad \partial(u)\psi_{|\bigcup_{j=1}^r F_j} = \psi_1(u).$$

Posons alors pour $u \in S(\mathfrak{b}_{0\mathbb{C}})$, $\psi_{\mathfrak{b}_0,F}(u) = \partial(u)\psi_{|F}$. Il est clair que $\psi_{\mathfrak{b}_0,F}$ ainsi définie, vérifie $P_1$ et $\mathbf{P_4}$.

On va modifier $\psi_{\mathfrak{b}_0,F}$ pour préparer la définition des applications $\psi_{\mathfrak{b},F}$, $\mathfrak{b} \in \mathrm{Car}(\mathfrak{q})$ et $F \subset \mathfrak{q}$.

Notons $W_{\mathbb{C}}^F = \{w \in W(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}, \mathfrak{b}_{0\mathbb{C}});\quad w.X = X \quad \forall X \in F\}$ et $\sharp W_{\mathbb{C}}^F$ le cardinal de $W_{\mathbb{C}}^F$. Pour $u \in S(\mathfrak{b}_{0\mathbb{C}})$, posons

$$\widetilde{\psi}_{\mathfrak{b}_0,F}(u) = \frac{1}{\sharp W_{\mathbb{C}}^F} \sum_{w \in W_{\mathbb{C}}^F} \psi_{\mathfrak{b}_0,F}(w.u).$$

Commençons par voir que cette fonction vérifie encore $\mathbf{P_1}$ et $\mathbf{P_4}$. Puisque si $v \in S(F_{\mathbb{C}})$, on a $w.v = v$, $w \in W_{\mathbb{C}}^F$, et $\psi_{\mathfrak{b}_0,F} \in \mathrm{Whit}_{\mathfrak{b}_0}(F)$. Par suite $\widetilde{\psi}_{\mathfrak{b}_0,F} \in$

$\mathrm{Hom}_{S(F_{\mathbb{C}})}(S(\mathfrak{b}_{0\mathbb{C}}),\ \mathcal{C}^\infty(F))$. Donc $\widetilde{\psi}_{\mathfrak{b}_0,F}$ vérifie $\mathbf{P_1}$. Il en est de même de $\mathbf{P_4}$; en effet, si $u \in S(\mathfrak{b}_{0\mathbb{C}})$ et $j \in \{1,\cdots,r\}$,

$$\begin{aligned}\widetilde{\psi}_{\mathfrak{b}_0,F}(u)_{|F_j} &= \frac{1}{\sharp W_{\mathbb{C}}^F}\sum_{w\in W_{\mathbb{C}}^F}\psi_{\mathfrak{b}_0,F}(w.u)_{|F_j}\\ &= \frac{1}{\sharp W_{\mathbb{C}}^F}\sum_{w\in W_{\mathbb{C}}^F}\psi_{\mathfrak{b}_0,F_j}(w.u)\quad \text{(par définition de } \psi_{\mathfrak{b}_0,F})\\ &= \frac{1}{\sharp W_{\mathbb{C}}^F}\sum_{w\in W_{\mathbb{C}}^F}\psi_{\mathfrak{b}_0,F_j}(u)\quad (\mathbf{P_3}\text{ de l'hypothèse de récurrence})\\ &= \varphi_{\mathfrak{b}_0,F_j}(u).\end{aligned}$$

Pour $\mathfrak{b} \in \mathrm{Car}(\mathfrak{q})$ et $x \in H_{\mathbb{C}}^F$ tels que $F \subset \mathfrak{b}$ et $x\mathfrak{b}_{\mathbb{C}} = \mathfrak{b}_{0\mathbb{C}}$, et en vue de vérifier $\mathbf{P_3}$, on pose pour $u \in S(\mathfrak{b}_{\mathbb{C}})$,

$$\widetilde{\psi}_{\mathfrak{b},F}(u) = \widetilde{\psi}_{\mathfrak{b}_0,F}(x.u).$$

Alors $\widetilde{\psi}_{\mathfrak{b},F}$ est bien définie ; en effet, si $y \in H_{\mathbb{C}}^F$ et $y.\mathfrak{b}_{\mathbb{C}} = \mathfrak{b}_{0\mathbb{C}}$, alors $(xy^{-1})\mathfrak{b}_{0\mathbb{C}} = \mathfrak{b}_{0\mathbb{C}}$. Si on note $w_0 =$ classe de $xy^{-1}$ dans $W(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}},\mathfrak{b}_{0\mathbb{C}})$, alors $w_0 \in W_{\mathbb{C}}^F$ et

$$\begin{aligned}\widetilde{\psi}_{\mathfrak{b}_0,F}(xu) &= \frac{1}{\sharp W_{\mathbb{C}}^F}\sum_{w\in W_{\mathbb{C}}^F}\psi_{\mathfrak{b}_0,F}(w.x.u)\\ &= \frac{1}{\sharp W_{\mathbb{C}}^F}\sum_{w\in W_{\mathbb{C}}^F}\psi_{\mathfrak{b}_0,F}(w.w_0y.u)\\ &= \frac{1}{\sharp W_{\mathbb{C}}^F}\sum_{w'\in W_{\mathbb{C}}^F}\psi_{\mathfrak{b}_0,F}(w'yu)\\ &= \widetilde{\psi}_{\mathfrak{b}_0,F}(y.u).\end{aligned}$$

Il est clair que $\widetilde{\psi}_{\mathfrak{b},F} \in \mathrm{Whit}_{\mathfrak{b}}\ (F)$ et que $\mathbf{P_3}$ est vérifiée.

Notons

$$\begin{aligned}N(H,F) &= \{g\in H;\quad g.F=F\}\\ Z(H,F) &= \{g\in H;\quad g.X=X\quad \forall X\in F\}\\ W(H,F) &= N(H,F)/Z(H,F).\end{aligned}$$

On va modifier les applications $\widetilde{\psi}_{\mathfrak{b},F}$ afin que les nouvelles applications obtenues vérifient la propriété $\mathbf{P_2}$ en plus des propriétés $\mathbf{P_1}$, $\mathbf{P_3}$, $\mathbf{P_4}$. Pour tout $\mathfrak{b} \in \mathrm{Car}(\mathfrak{q})$ tel que $F \subset \mathfrak{b}$ et pour tout $u \in S(\mathfrak{b}_{\mathbb{C}})$ , on définit l'application $\varphi_{\mathfrak{b},F}(u)$ sur $F$ par

$$\varphi_{\mathfrak{b},F}(u)(X) = \frac{1}{\sharp W_F}\sum_{w\in W_F}\widetilde{\psi}_{w\mathfrak{b},F}(w\cdot u)(w\cdot X), \tag{1}$$

et pour tout $g \in H$, on définit l'application $\varphi_{g\mathfrak{b},gF}(g\cdot u)$ par

$$\varphi_{g\mathfrak{b},gF}(g\cdot u)(g.X) = \varphi_{\mathfrak{b},F}(u)(X) \tag{2}$$

Remarquons que si $g_0 \in H$ et $g_0 F = F$, (1) et (2) donnent la même expression ; en effet

$$\begin{aligned}
\varphi_{g_0\mathfrak{b},F}(g_0 u)(g_0 X) &= \frac{1}{\sharp W_F}\sum_{w\in W_F}\widetilde{\psi}_{wg_0\mathfrak{b},F}(wg_0u)(wg_0X)\\
&= \frac{1}{\sharp W_F}\sum_{w'\in W_F}\widetilde{\psi}_{w'\mathfrak{b},F}(w'u)(w'X)\\
&= \varphi_{\mathfrak{b},F}(u)(X)
\end{aligned}$$

On vient donc de définir $\varphi_{\mathfrak{b},E}$, $E \in \mathrm{conj}(F)$, $\mathfrak{b} \in \mathrm{Car}(\mathfrak{q})$ tel que $\mathfrak{b} \supset E$, de façon que $\mathbf{P_2}$ soit vérifiée. Montrons que les propriétés $\mathbf{P_1}$, $\mathbf{P_3}$, $\mathbf{P_4}$, le sont aussi. Quant à la propriété $(*)$ de la proposition 5.4 , elle est vide dans le deuxième cas.

$\mathbf{P_1}$. Soit $Z \in F$, $u \in S(\mathfrak{b}_{\mathbb{C}})$, $X \in F$, alors

$$\begin{aligned}
\varphi_{\mathfrak{b},F}(Zu)(X) &= \frac{1}{\sharp W_F}\sum_{w\in W_F}\widetilde{\psi}_{w\mathfrak{b},F}(w.Zu)(w.X)\\
\widetilde{\psi}_{w\mathfrak{b},F}(w.Zu)(w.X) &= \widetilde{\psi}_{w\mathfrak{b},F}(wZ.wu)(w.X)\\
&= [\partial(wZ)\widetilde{\psi}_{w\mathfrak{b},F}(w.u)](w.X) \quad \text{car } \widetilde{\psi} \text{ vérifie } \mathbf{P_1}\\
&= \partial(Z)[X \longmapsto \widetilde{\psi}_{w\mathfrak{b},F}(w.u)(w.X)].
\end{aligned}$$

Donc $\varphi_{\mathfrak{b},F}(Zu)(X) = (\partial(Z).\varphi_{\mathfrak{b},F}(u))(X)$ pour tout $Z \in F$. On peut déduire alors que $\varphi_{\mathfrak{b},F}$ appartient à $\mathrm{Whit}_{\mathfrak{b}}(F)$.

$\mathbf{P_3}$. Soient $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{b}' \in \mathrm{Car}(\mathfrak{q})$, $x \in H_{\mathbb{C}}^F$ tels que $F \subset \mathfrak{b}\cap\mathfrak{b}'$ et $x\mathfrak{b}_{\mathbb{C}} = \mathfrak{b}'_{\mathbb{C}}$. Alors pour tout $u \in S(\mathfrak{b}_{\mathbb{C}})$ ,

$$\begin{aligned}
\varphi_{\mathfrak{b}',F}(x.u)(X) &= \frac{1}{\sharp W_F}\sum_{w\in W_F}\widetilde{\psi}_{w\mathfrak{b}',F}(w.xu)(w.X)\\
&= \frac{1}{\sharp W_F}\sum_{w\in W_F}\widetilde{\psi}_{w\mathfrak{b}',F}(w.xw^{-1}w.u)(wX)\\
&= \frac{1}{\sharp W_F}\sum_{w\in W_F}\widetilde{\psi}_{w\mathfrak{b},F}(w.u)(wX) \text{ car } wxw^{-1}(w\mathfrak{b})_{\mathbb{C}} = (w\mathfrak{b}')_{\mathbb{C}}.\\
&= \varphi_{\mathfrak{b},F}(u)(X).
\end{aligned}$$

$\mathbf{P_4}$. Soient $j \in \{1, 2, \ldots, k\}$, $X \in F_j$, alors

$$\begin{aligned}
\varphi_{\mathfrak{b},F}(u)(X) &= \frac{1}{\sharp W_F}\sum_{w\in W_F}\widetilde{\psi}_{w\mathfrak{b},F}(w\cdot u)(w\cdot X)\\
&= \frac{1}{\sharp W_F}\sum_{w\in W_F}\widetilde{\psi}_{w\mathfrak{b},F}(wu)_{|F_j}(w.X), (\text{car les } \widetilde{\psi}_{w\mathfrak{b},F} \text{ vérifient } \mathbf{P_4}).\\
&= \frac{1}{\sharp W_F}\sum_{w\in W_F}\varphi_{w\mathfrak{b},wF_j}(wu)(w.X)\\
&= \frac{1}{\sharp W_F}\sum_{w\in W_F}\varphi_{\mathfrak{b},F_j}(u)(X) \quad (\mathbf{P_2} \text{ de l' hypothèse de récurrence})\\
&= \varphi_{\mathfrak{b},F_j}(u)(X).
\end{aligned}$$

Ceci achève la preuve de la proposition 5.4 et donc celle du théorème 4.1. ∎

## 6. Références

[1] Dadok, J. *On the $C^\infty$ Chevalley's theorem*, Advances in Math. **44** (1982), 121–131.

[2] Kamoun, N. *Fonctions indéfiniment différentiables invariantes sur l'espace tangent d'un espace symétrique*, Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse, à paraître.

[3] Luna, D. *Fonctions différentiables invariantes sous l'action d'un groupe réductif*, Ann. Inst. Fourier Grenoble **26** (1976), 33–49.

[4] Oshima, T., and T. Matsuki, *Orbits on affine symmetric spaces under the action of the isotropy subgroups*, J. Math. Soc. Japan. **32** (1980), 399–414.

[5] Oshima, T., and J. Sekiguchi, *The restricted root system of a semisimple symmetric pair*, Advanced Studies in Pure Math. **4** (1984), 433–497.

[6] Poenaru, V. "Analyse différentielle," (Springer) Lecture Notes in Math **371**, 1974, 228 pp.

[7] Sekiguchi, J. *Invariant spherical hyperfunctions on the tangent space of a symmetric space*, Advanced Studies in Pure Mathematics. **6** (1985), 83–96.

[8] Sugiura, M. *Conjugate classes of Cartan subalgebras in real semisimple Lie algebras*, Math. Soc. of Japan **11** (1959), 374–434.

Département de Mathématiques,
Faculté des Sciences,
5019 Monastir,
Tunisie.

Received June 29, 1997
and in final form March 24, 1998