Journal of Lie Theory
Volume **8** (1998) 153–162

Irreductibilité de certaines representations non unitaires dans des espaces de distributions propres

Abderrahim Khaoua

Communicated by K.-H.Neeb

Abstract. Let $G_0{=}K{\times}V$ a semi-direct product of a compact Lie group K and a vector space V. Let $\mathcal{E}_\chi$ be the joint eigenspace (of functions or distributions) of the G_0-invariant differential operators on G_0/K associated to a character χ of the algebra of these operators. We give a sufficient condition for topological irreducibility of the action of G_0 on $\mathcal{E}_\chi$. This is a partial generalisation of a result of S. Helgason when G_0 is a Cartan motion group. The present proof is of a more algebraic nature.

1. Introduction

1.1. Soient K un groupe de Lie compact réel, V un espace vectoriel réel et $\rho : K \longrightarrow GL(V)$ un homomorphisme régulier de K dans V. On regarde K comme un groupe algébrique réel. On considère le groupe produit semi-direct $G_0 = K \underset{\rho}{\times} V$, la loi de groupe étant donnée par :

$$(k_1, u_1).(k_2, u_2) = (k_1k_2, k_2^{-1}u_1 + u_2)$$

pour tous $(k_1, k_2) \in K^2$ et $(u_1, u_2) \in V^2$. Si l'on identifie K et V à des sous-groupes de G_0, alors tout élément $g = (k, u)$ dans G_0 s'écrit de manière unique sous la forme $g = ku$.

1.2. On note $\mathbb{D}(V)$ la $\mathbb{C}$-algèbre constituée des opérateurs différentiels sur V à coefficients constants. Soit $V_\mathbb{C}$ l'espace complexifié de V. Alors, l'algèbre symétrique $S(V)$ de V s'identifie à l'algèbre des fonctions polynômes :

$$p : V_\mathbb{C}^* \longrightarrow \mathbb{C}.$$

Pour $\lambda \in V_\mathbb{C}^*$, on pose :

$$e_\lambda(v) = e^{\langle\lambda, v\rangle}, \quad v \in V.$$

ISSN 0949–5932 / \$2.50

Considérons maintenant l'application $\sigma : \mathbb{D}(V) \longrightarrow S(V)$ définie par :

$$(\sigma(D))(\lambda) := e_{-\lambda}D(e_\lambda), \quad \lambda \in V_{\mathbb{C}}^*,\ D \in \mathbb{D}(V).$$

Alors σ est un isomorphisme unitaire de $\mathbb{C}$-algèbres. Si on note $\mathbb{D}(V)^K$ et $S(V)^K$ les sous-algèbres de $\mathbb{D}(V)$ et $S(V)$, constituées des éléments K-invariants, alors la restriction de σ à $\mathbb{D}(V)^K$ est un isomorphisme de $\mathbb{D}(V)^K$ sur $S(V)^K$, qu'on notera également par σ.

Comme l'espace symétrique G_0/K s'identifie canoniquement à V, l'algèbre $\mathbb{D}(G_0/K)$ des opérateurs G_0-invariants sur G_0/K s'identifie à $\mathbb{D}(V)^K$.

Par un théorème d'Hilbert, l'algèbre $S(V)^K$ est de type fini. Soient $p_1, \dots, p_r$ tels que : $S(V)^K = \mathbb{C}[p_1, \dots, p_r]$. Pour $1 \leq k \leq r$, notons $D_k = \sigma^{-1}(p_k)$, de sorte que $\mathbb{D}(V)^K = \mathbb{C}[D_1, \dots, D_r]$.

1.3. Si $\chi : \mathbb{D}(V)^K \longrightarrow \mathbb{C}$ est un caractère de $\mathbb{D}(V)^K$, on considère l'espace :

$$\mathcal{E}_\chi = \{f \in \mathcal{C}^\infty(V) | (\forall D \in \mathbb{D}(V)^K) D.f = \chi(D)f\}$$

qu'on munit de la topologie de Fréchet induite par la topologie usuelle de $\mathcal{C}^\infty(V)$. Le groupe G_0 opère sur $\mathcal{E}_\chi$ par :

$$(\pi_\chi(g).f)(X) = f(g^{-1}.X)$$

pour $f \in \mathcal{E}_\chi,\ g \in G$ et $X \in V \simeq G/K$. Plus précisément :

$$(\pi_\chi(k).f).(X) = f(\rho(k)^{-1}.X), \quad k \in K$$

et

$$(\pi_\chi(X_0).f).(X) = f(X - X_0) \text{ pour } X_0 \in V.$$

On note par $D'(V)$ l'espace des distributions sur V.

De même, on considère la représentation (π'_χ, D'_χ), où :

$$D'_\chi = \{T \in D'(V) | (\forall D \in \mathbb{D}(V)^K) D.T = \chi(D)T\}$$

muni de la topologie duale forte et où le groupe G_0 opère par :

$$(\pi'_\chi(g).T).f = \langle T, g^{-1}.f\rangle$$

pour $T \in D'(V),\ f \in D(V)$ et $g \in G$.

D'après [12], la représentation $(\pi_\chi, \mathcal{E}_\chi)$ est topologiquement irréductible (resp. scalairement irréductible) si et seulement si (π'_χ, D'_χ) est topologiquement irréductible (resp. scalairement irréductible). On s'intéresse, dans ce qui suit, à la représentation $(\pi_\chi, \mathcal{E}_\chi)$.

1.4. Soit $p : V_{\mathbb{C}}^* \longrightarrow \mathbb{C}^r$ l'application polynômiale définie par : $p(x) = (p_1(x), \dots, p_r(x))$,

$x \in V_{\mathbb{C}}^*$, et pour $1 \leq k \leq r$ posons $\xi_k = \chi(D_k)$. Il est clair que la représentation $(\pi_\chi, \mathcal{E}_\chi)$ est paramétrée par $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_r)$. On note $K_{\mathbb{C}}$ le groupe algébrique réductif complexe obtenu en complexifiant K. On considère les deux conditions suivantes :

C_1 - La variété affine $p^{-1}(\xi)$ est une $K_{\mathbb{C}}$-orbite.

C_2 - L'idéal $\langle p_1 - \xi_1, \ldots, p_r - \xi_r \rangle$ est radiciel.

On peut maintenant énoncer le résultat principal :

Théorème 1.5. *Si les conditions C_1 et C_2 sont satisfaites, alors les représentations $(\pi_\chi, \mathcal{E}_\chi)$ et (π'_χ, D'_χ) sont topologiquement irréductibles.* ∎

Corollaire 1.6. *Sous les hypothèses de 1.5, les représentations $(\pi_\chi, \mathcal{E}_\chi)$ et (π'_χ, D'_χ) sont scalairement irréductibles.*

Démonstration. 5 et de [14], où il est prouvé que l'irréductibilité topologique implique l'irréductibilité scalaire (fait qui n'est pas toujours vérifié pour les représentations non-unitaires). ∎

2. Les vecteurs de Kempf-Ness

2.1. Nous rappelons dans ce numéro un résultat de base, concernant les vecteurs de longueur minimale, dû à Kempf et Ness. On conserve les notations du numéro 1. L'action de K dans V induit une action de $K_{\mathbb{C}}$ dans $V_{\mathbb{C}}$. Soit $(\ |\ )$ une forme hermitienne K-invariante sur $V_{\mathbb{C}}$ et notons $\|.\|$ la norme associée à $(\ |\ )$.

Pour $v \in V_{\mathbb{C}}$, on note $F_v : K_{\mathbb{C}} \longrightarrow \mathbb{R}^+$ la fonction définie par : $F_v(g) = \|g.v\|^2$. On dira que v est un vecteur de longueur minimale si : $\|v\| \leq \|g.v\|$ pour tout $g \in K_{\mathbb{C}}$.

Théorème 2.2. ([10])

(1) *L'application F_v admet un point critique si et seulement si l'orbite $K_{\mathbb{C}}.v$ est fermée.*

(2) *Tout point critique de F_v est un minimum.*

Supposons que $F_v(e)$ est un minimum. Alors :

(3) $K.v = \{v' \in K_{\mathbb{C}}.v \mid \|v'\| = \|v\|\}$

(4) $(K_{\mathbb{C}})_v = (K_v)_{\mathbb{C}}$, *où $(K_{\mathbb{C}})_v$ (resp. K_v) est le stabilisateur de v dans $K_{\mathbb{C}}$ (resp. dans K).*

On retiendra surtout que toute $K_{\mathbb{C}}$-orbite fermée dans $V_{\mathbb{C}}$ admet un vecteur de longueur minimale. ∎

3. Transformation de Poisson

3.1. Soient $\lambda \in V_{\mathbb{C}}^*$, K_λ le stabilisateur de λ dans K, et dk une mesure K-invariante sur K/K_λ. On note $\mathcal{P}_\lambda : L^2(K/K_\lambda) \longrightarrow \mathcal{C}^\infty(V)$ l'opérateur défini par :

$$(\mathcal{P}_\lambda(f))(X) = \int_{K/K_\lambda} f(k)e^{\langle k.\lambda, X\rangle}dk$$

pour $f \in L^2(K/K_\lambda)$ et $X \in V$.

Proposition 3.2. *Soit $\mathcal{O}$ une $K_{\mathbb{C}}$-orbite fermée dans $V_{\mathbb{C}}^*$. Alors il existe $\lambda \in \mathcal{O}$ tel que pour tout $\mu \in K.\lambda$, $\mathcal{P}_\mu$ est injective.*

Démonstration. D'après le théorème 2.2. appliqué à $V_{\mathbb{C}}^*$, $\mathcal{O}$ contient un vecteur λ de longueur minimale. Il est clair que tout vecteur $\mu \in K.\lambda$ est de longueur minimale. Il est alors observé dans [11] que $\mathcal{P}_\mu$ est injective. ∎

4. Démonstration du théorème 1.5

4.1. Soit E_ξ le sous-espace de $\mathcal{E}_\chi$ engendré par $\{e_v, v \in p^{-1}(\xi)\}$. Alors E_ξ est dense dans $\mathcal{E}_\chi$. En effet, la condition C_2 permet d'appliquer directement la proposition II.3 de [14]. Ce fait provient essentiellement d'un résultat classique de Malgrange.

4.2. Soit maintenant $\{0\} \neq W \subset \mathcal{E}_\chi$ un sous-espace fermé et G_0-invariant. Il s'agit de montrer que $W = \mathcal{E}_\chi$. Par hypothèse et compte tenu de la proposition 3.2., il existe $\lambda \in V_{\mathbb{C}}^*$ tel que $p^{-1}(\{\xi\}) = K_{\mathbb{C}}.\lambda$ et que $\mathcal{P}_\lambda$ est injective. Notons $\psi_\lambda : V \longrightarrow \mathbb{C}$ l'application définie par :

$$\psi_\lambda(X) = \int_K e^{\langle k.\lambda, X\rangle}dk, \quad X \in V.$$

Alors ψ_λ est dans $\mathcal{E}_\chi$ et elle est K-invariante. Comme l'espace des fonctions sphériques dans $\mathcal{E}_\chi$ est de dimension un [5], il est engendré par ψ_λ. En intégrant un élément de W sur K, de sorte que la fonction obtenue soit non nulle, on voit que W contient ψ_λ.

Posons maintenant :

$$\begin{aligned} H_\lambda &= Im(\mathcal{P}_\lambda) \\ &= \left\{ f(X) = \int_{K/K_\lambda} F(k)e^{\langle k.\lambda, X\rangle}dk, \quad F \in L^2(K/K_\lambda) \right\} \end{aligned}$$

On munit H_λ d'une structure d'espace hilbertien comme suit : si $f = \mathcal{P}_\lambda(F)$ et $f' = \mathcal{P}_\lambda(F')$, on pose : $(f|f') = (F, F')_{L^2(K/K_\lambda)}$. Comme $\mathcal{P}_\lambda$ est injective, l'espace engendré par $\{F_X : kK_\lambda \longrightarrow e^{\langle k\lambda, X\rangle},\ X \in V\}$ est dense dans $L^2(K/K_\lambda)$, de sorte que celui engendré par $\{\mathcal{P}_\lambda(F_X), X \in V\}$ est dense dans H_λ. Or

$$\mathcal{P}_\lambda(F_X) = (\pi_\chi(-X)).\psi_\lambda \in W.$$

Comme l'injection canonique $H_\lambda \hookrightarrow \mathcal{E}_\chi$ est continue, on voit que $H_\lambda \subset W$.

On note $W^{\perp}$ l'orthogonal de W dans le dual de $\mathcal{C}^{\infty}(V)$. C'est donc l'espace de distributions, à support compact sur V, identiquement nulles sur W.

Soit maintenant T un élément dans $W^{\perp}$ (T est en particulier une distribution à support compact sur V). Alors pour tout f dans $L^2(K/K_\lambda)$:

$$\langle T_X, \int_{K/K_\lambda} e^{\langle k.\lambda, X\rangle} f(k)dk >= \int_{K/K_\lambda} \langle T_X, e^{\langle k.\lambda, X\rangle}\rangle f(k)dk = 0.$$

Ceci résulte du fait que T est somme de dérivées de fonctions continues à support compact dans V, de la compacitè de K et du théorème de Fubini pour les fonctions. Comme f est arbitraire, $\langle T_X, e^{\langle k,\lambda,X\rangle}\rangle = 0$ pour tout $k \in K$. Par prolongement analytique,

$$\langle T, e_v\rangle = 0, \quad \forall v \in p^{-1}(\{\xi\}).$$

Compte tenu de 4.1., T est identiquement nulle sur $\mathcal{E}_\chi$, et par conséquent $W = \mathcal{E}_\chi$. D'où le résultat voulu.

5. Un exemple général

Nous démontrons dans cette section que lorsque $p_1, \ldots, p_r$ sont algébriquement indépendants, les représentations qu'on considère sont topologiquement irréductibles (génériquement). Nous rappelons d'abord un résultat de base concernant le quotient d'un espace vectoriel pour un groupe réductif.

5.1. Soit $\rho : G \longrightarrow GL(W)$ une représentation du groupe algébrique réductif complexe G dans W. On sait également que $\mathbb{C}[W]^G$ est de type fini. On note W/G la variété algébrique affine associée à $\mathbb{C}[W]^G$. D'autre part, l'homomorphisme canonique $\mathbb{C}[W]^G \hookrightarrow \mathbb{C}[W]$ induit un morphisme $\pi : W \longrightarrow W/G$ de variétés. Soit $p : W \longrightarrow \mathbb{C}^r$ le morphisme défini par : $p = (p_1, \ldots, p_r)$, où les p_i sont les générateurs de $\mathbb{C}[W]^G$. Voici quelques résultats de base sur W/G.

Proposition 5.2. [1]

(1) *Si on note Y la variété des relations des p_i, alors W/G est isomorphe à Y.*

(2) $\mathrm{Im}(p) = Y$

(3) *Le morphisme p sépare les ensembles algébriques de W qui sont disjoints et G-invariants.*

(4) *Si $v \in W$, alors $\overline{G.v}\backslash Gv$ est une réunion d'orbites de dimensions strictement inférieures à* $\dim G.v$ *(ce fait n'utilise pas que G est réductif).*

(5) *L'adhérence de chaque G-orbite dans W contient une seule orbite fermée.* ■

Remarque 5.3. Revenons maintenant aux notations du 1. Il est clair que les représentations π_ξ et π'_ξ sont paramétrées par la variété $V_{\mathbb{C}}^*/K_{\mathbb{C}}$, ou, ce qui revient au mıme, par les fibres du morphisme p. Nous allons appliquer ce résultat pour $G = K_{\mathbb{C}}$ et $W = V_{\mathbb{C}}^*$.

Lemma 5.4. *On suppose que l'algèbre $\mathbb{C}[p_1, \ldots, p_r]$ est un anneau de polynômes. Alors il existe un ouvert de Zariski non vide U dans $V_{\mathbb{C}}^*$, G-invariant et π-saturé tel que :*

(1) *Pour tout $x \in U$, la fibre $p^{-1}\{p(x)\}$ est une $K_{\mathbb{C}}$-orbite fermée de dimension maximale.*
(2) *Pour tout $x \in U$, l'idéal $\langle p_1 - \xi_1, \ldots, p_r - \xi_r\rangle$ est radiciel.*

Démonstration. Rappelons que le morphisme $p : V_{\mathbb{C}}^* \longrightarrow \mathrm{Im}(p)$ est une réalisation de π. Notons m la dimension maximale des orbites de $K_{\mathbb{C}}$ dans $V_{\mathbb{C}}^*$ (qu'on appelle orbites régulières). On pose :

$$\begin{aligned} V_R &= \{x \in V_{\mathbb{C}}^* \,|\, \dim K_{\mathbb{C}}.x = m\} \\ V_L &= \{x \in V_{\mathbb{C}}^* \,|\, \dim\langle dp_1(x), \ldots, dp_r(x)\rangle = r\} \end{aligned}$$

Ce sont deux ouverts de Zariski non vides de $V_{\mathbb{C}}^*$. Pour V_L, ceci provient du fait que les p_i sont algébriquement indépendants et c'est un fait classique. En particulier, $H = V_R \cap V_L$ est un ouvert de Zariski de $V_{\mathbb{C}}^*$ et il est $K_{\mathbb{C}}$-invariant. Par ailleurs [8], $V_{\mathbb{C}}^*$ contient un ouvert dense V_F, constitué d'orbites fermées. Il en résulte que $U = H \cap V_F$ est un ouvert non vide de $V_{\mathbb{C}}^*$ et $K_{\mathbb{C}}$-invariant.

Soit $x \in U$. Alors $K_{\mathbb{C}}.x$ est l'unique orbite fermée contenue dans la fibre $p^{-1}\{p(x)\}$. D'autre part, si $y \in \pi^{-1}(\pi(x))$, $\overline{G.y} \supset G.x$ (où l'on a posé $G = K_{\mathbb{C}}$) ; en particulier $\dim \overline{Gy} \geq \dim Gx$. Comme x est régulier, $\dim Gx \geq \dim \overline{Gy} = \dim Gy$. Il en résulte que $G.x = \overline{G.y}$. En effet, si $x \notin G.y$, $G.x \subset \overline{G.y} \backslash G.y$, donc $\dim G.x < \dim \overline{G.y}$. Contradiction. En particulier $y \in G.x$. On vient d'établir que $\pi^{-1}(\pi(x)) = G.x$ pour $x \in U$ (en réalité, on obtient le mıme résultat en considérant l'ouvert $V_R \cap V_F \supset U$).

Posons, pour $x \in U$, $\xi = p(x) = (\xi_1, \ldots, \xi_r) \in \mathbb{C}^r$. Alors :

$$p^{-1}\{\xi\} = \{y \in V_{\mathbb{C}}^* | p_i(y) - \xi_i = 0, \ \forall 1 \leq i \leq r\} = G.x$$

Donc codim $p^{-1}\{\xi\} = \mathrm{rg}(dp_1(y), \ldots, dp_r(y))$, pour tout $y \in p^{-1}\{\xi\}$. D'après le lemme 6.1, l'idéal $\langle p_1 - \xi_1, \ldots, p_r - \xi_r\rangle$ est radiciel (noter que les orbites sont équidimensionnelles). ■

Les conditions C_1 et C_2 sont donc satisfaites pour tout $\xi \in p(U)$.

Corollaire 5.5. *On suppose que l'algèbre $\mathbb{C}[p_1, \ldots, p_r]$ est libre. Alors il existe un ouvert U_0 (de Zariski) dans $V_{\mathbb{C}}^*/K_{\mathbb{C}}$ tel que pour tout $\xi \in U_0$, les représentations correspondantes $(\pi_\xi, \mathcal{E}_\xi)$ et $(\pi'_\xi, D'{}_\xi)$ sont topologiquement et scalairement irréductibles.*

Démonstration. Soit U comme dans le lemme 5.4. C'est un ouvert $K_{\mathbb{C}}$-invariant et saturé (i.e. $\pi^{-1}(\pi(U)) = U$). Alors $U_0 = \pi(U)$ est un ouvert de $V_{\mathbb{C}}^*/K_{\mathbb{C}}$, et le lemme 5.4 montre que U_0 a les propriétés requises. ■

5.5.A. Le cas des représentations polaires.

On conserve les notations de la section 1 et on note $\mathfrak{k}$ l'algèbre de Lie de K. Pour $v \in V$, posons $\mathfrak{a}_v = (\mathfrak{k}.v)^{\perp}$, où $\mathfrak{k}.v$ est l'espace tangent à l'orbite $K.v$ en v. On dira que v est régulier si $\dim K.v$ est maximale. D'après [2], la représentation (ρ, V) est dite polaire s'il existe un élément régulier $v \in V$ tel que :

$$\mathfrak{k}.u \subset (\mathfrak{a}_v)^{\perp}, \quad \forall u \in \mathfrak{a}_v.$$

Il revient au mıme de dire que les sous-espaces $\mathfrak{a}_v$, v régulier, constituent une seule classe de conjugaison sous l'action de K. Dans ces conditions, les sous-espaces $\mathfrak{a}_v$, v étant régulier, sont appelés sous-espaces de Cartan de (K, V).

D'après [3], l'algèbre des invariants $\mathbb{C}[V_{\mathbb{C}}]^{K_{\mathbb{C}}}$ est libre. Compte tenu du corollaire 5.5., les représentations π_ξ et π'_ξ, $\xi \in Im(p)$ sont génériquement topologiquement irréductibles (donc scalairement irréductibles).

Remarque . La représentation adjointe associée à une paire symétrique réductive est polaire. Les sous-espaces de cartan, au sens de [2], coincident avec les sous-espaces de Cartan usuels. On retrouve en particulier une partie du résultat de Helgason ([4] , $Th.6.6$). L'ouvert U coincide avec celui des éléments réguliers.

5.5.B. Les représentations colibres.

Les représentations polaires constituent une sous-classe des représentations (K, V) telles que $\mathbb{C}[V_{\mathbb{C}}]$ soit un $\mathbb{C}[V_{\mathbb{C}}]^{K_{\mathbb{C}}}$-module libre. D'après [9], th. 12, l'algèbre des invariants $\mathbb{C}[V_{\mathbb{C}}]^{K_{\mathbb{C}}}$ est libre. Donc le corollaire 5.5. s'applique.

5.5.C. Dans le rapport de Popov [9], les sections 3 et 4 fournissent (entre autres) des renseignements concernant les représentations (G, W) de groupes algébriques réductifs complexes satisfaisant l'une des propriétés suivantes :

- **(1)** (G, W) est colibre.
- **(2)** $\mathbb{C}[W]^G$ est libre.

Dans les tables de classification auxquelles Popov renvoie, se trouvent des représentations de type $(K_{\mathbb{C}}, V_{\mathbb{C}})$, i.e. des complexifiées de représentations réelles de groupes compacts. Ceci permet d'obtenir d'autres exemples de représentations qui sont, génériquement, topologiquement irréductibles.

6. Un critère d'irréductibilité.

Nous aurons besoin du résultat suivant, sans doute bien connu, lequel utilise des notions d'algèbre locale, qu'on peut trouver dans [13]. Faute de référence appropriée, cf. néanmoins [7], nous en donnons une preuve.

Lemme 6.1. *Soit $X \subset \mathbb{C}^n$ une variété affine équidimensionnelle. On suppose :*

(1) $X = \{x \in \mathbb{C}^n | f_1(x) = f_2(x) = \ldots = f_r(x) = 0\}$

(2) $\forall x \in X,\ \mathrm{rg}\{df_1(x), \ldots, df_r(x)\} = \text{ codim } X.$

Alors l'idéal $\langle f_1, \ldots, f_r \rangle$ est radiciel.

Démonstration. Soit $S = \mathcal{O}(\mathbb{C}^n)$ l'algèbre des fonctions régulières sur $\mathbb{C}^n$. Posons : $I = \langle f_1, \ldots, f_r \rangle$, $I(X) = \sqrt{\langle f_1, \ldots, f_r \rangle}$, $S/I(X) = \mathcal{O}(X)$ et $\ell =$ codim$X$. On sait que :

$$\dim S/I(X) + htI(X) = \dim S = n.$$

a) Posons $S_x = \mathcal{O}(\mathbb{C}^n)_x$, l'anneau local de $\mathbb{C}^n$ en x. C'est un anneau local régulier. L'hypothèse (2) s'exprime en disant que :

$$\mathrm{rg}\{df_1(x), \ldots, df_r(x)\} = \ell \quad \text{dans} \quad T_x^*\mathbb{C}^n \simeq m_x/m_x^2$$

où m_x est l'idéal maximal de S_x. Par [13], proposition 22, page IV-40, on peut extraire $\{f_{i_1}, \ldots, f_{i_\ell}\}$ faisant partie d'un système de paramètres de S_x. D'après la mıme référence l'anneau $S_x/\langle f_{i_1}, \ldots, f_{i_\ell} \rangle$ est régulier, donc intègre de dimension $n - \ell = \dim X$. Puisque :

$$\begin{aligned} \dim S_x/\langle f_{i_1}, \ldots, f_{i_\ell} \rangle_x + ht\langle f_{i_1}, \ldots, f_{i_\ell} \rangle_x = {} & \dim S_x \\ = {} & n \end{aligned}$$

la hauteur de l'idéal $\langle f_{i_1}, \ldots, f_{i_\ell} \rangle_x$ est donc ℓ.

b) On a évidemment :

$$\langle f_{i_1}, \ldots, f_{i_\ell} \rangle_x \subset \langle f_1, \ldots, f_r \rangle_x = I_x \subset \sqrt{I_x} = (\sqrt{I})_x.$$

On a $\sqrt{I} = I(X)$, donc $\sqrt{I_x} = I(X)_x$ est un idéal de hauteur ℓ puisque X est équidimensionnelle. On en déduit que $\langle f_{i_1}, \ldots, f_{i_\ell} \rangle_x = I_x = \sqrt{I_x}$ pour tout x, et donc que I_x est premier.

On a donc montré que pour tout $x \in X$, $(\sqrt{I})_x = I_x$, $\forall x \in X$, autrement dit :

$$(\sqrt{I}/I)_x = (0).$$

Ceci signifie algébriquement que le S/I-module $\sqrt{I}/I$ a un support vide. Donc $\sqrt{I}/I = (0)$ et ainsi $I = \sqrt{I}$ est radiciel. ■

Revenons maintenant à nos notations. On ne suppose pas que $p_1, \ldots, p_r$ sont algébriquement indépendants.

Corollaire 6.2. *On suppose qu'il existe un ouvert de Zariski non vide $O \subset V_{\mathbb{C}}^*$ tel que :*

$$\mathrm{codim}\ K_{\mathbb{C}}.x = \mathrm{rg}(dp_1(x), \ldots, dp_r(x))$$

pour tout $x \in O$. Alors il existe un ouvert de Zariski non vide $W \subset V_{\mathbb{C}}^*$ tel que, pour tout $\xi \in p(W)$, les représentations π_ξ et π'_ξ sont topologiquement (donc scalairement) irré

Démonstration. Considérons les ouverts non vides V_F et V_R, introduits dans la preuve du lemme 5.4. Soit x dans l'ouvert non vide $W = O \cap V_F \cap V_R$, et posons $\xi = p(x) = (\xi_1, \ldots, \xi_r) \in \mathbb{C}^r$. Alors $p^{-1}(\xi) = K_{\mathbb{C}}.x$. D'autre part, appliquant le lemme 6.1. à $f_i = p_i - \xi_i$, $1 \leq i \leq r$, on voit que l'idéal $\langle p_1 - \xi_1, \ldots, p_r - \xi_r \rangle$ est premier ; d'où les conditions C_1 et C_2. ■

7. Un résultat d'irréductibilité scalaire

7.1. On suppose dans cette section que K est un groupe algébrique *réductif réel* et connexe (en particulier K n'est pas nécessairement compact). Soit (ρ, V) une représentation régulière de K. Alors on sait que l'algèbre des invariants est également de type fini. De mıme toutes les constructions faites dans le numéro 1 restent valables.

7.2. Le résultat qui suit constitue une généralisation du contenu de la note [12] où l'on établit que pour l'action adjointe associée à une paire symétrique non-riemannienne, les représentations π_ξ et π'_ξ sont scalairement irréductibles pour tout paramètre ξ. La condition B_1 de 7.3. traduit que la représentation $\rho_{\mathbb{C}}$ de $K_{\mathbb{C}}$ dans $V_{\mathbb{C}}$ est, par définition, visible. Cette condition est raisonable dans la mesure où les représentations visibles des groupes réductifs complexes sont toutes classifiées (cf [6] , p. 203). D'autre part, les conditions B_1 et B_2 sont satisfaites pour tout paramètre ξ dans le cas de l'action adjointe.

Théorème 7.3. *Supposons réalisées les conditions suivantes pour $\xi \in Im(p)$.*
(B_1) *La fibre $p^{-1}\{\xi\}$ dans $V^*_{\mathbb{C}}$ est une réunion finie de $K_{\mathbb{C}}$-orbites.*
(B_2) *L'idéal $\langle p_1 - \xi_1, \ldots, p_r - \xi_r \rangle$ est radiciel.*
Alors les représentations π_ξ et π'_ξ sont scalairement irréductibles.

Démonstration. Notons d'abord que la condition B_2 assure la densité de l'espace engendré par les fonctions e_x, $x \in p^{-1}(\xi)$ dans $\mathcal{E}_\xi$. Ceci étant, soit $A : \mathcal{E}_\xi \longrightarrow \mathcal{E}_\xi$ un opérateur d'entrelacement continu. Comme dans [12], il existe une application $b : p^{-1}(\xi) \longrightarrow \mathbb{C}$ telle que :

$$A\ e_x = b(x)\ e_x \quad \forall x \in p^{-1}(\xi).$$

Il s'agit de voir que b est constante sur toute $K_{\mathbb{C}}$-orbite dans $p^{-1}(\xi)$. Pour $x \in p^{-1}(\xi)$, posons :

$$\mathcal{E}_x = \{f \in \mathcal{E}_\xi | A.f = b(x)f\}.$$

Soit maintenant $T \in \mathcal{E}'_\xi$ telle que $\langle T, f \rangle = 0$, pour tout $f \in \mathcal{E}_x$. Alors :

$$\langle T, e_{gx} \rangle = 0 \quad \forall g \in K.$$

Comme l'application $g \longrightarrow \langle T, e_{gx} \rangle$ est holomorphe sur $K_{\mathbb{C}}$ et identiquement nulle sur K, $\langle T, e_{gx} \rangle = 0$ pour tout $g \in K_{\mathbb{C}}$. D'après le théorème de Hahn-Banach, $e_{g.x} \in \mathcal{E}_x$, $\forall g \in K_{\mathbb{C}}$. Compte tenu de ($B_1$) et du fait que $p^{-1}(\xi)$ est connexe, b est constante. Il résulte maintenant de (B_2) que A est scalaire.

Remarque 7.4. Nous aurions pu remplacer (B_2) par la condition suivante laquelle est plus faible : (B'_2) l'espace engendré par $\{e_x, x \in p^{-1}(\xi)\}$ est dense dans $\mathcal{E}_\xi$.

Remerciements : L'auteur remercie chaleureusement Thierry Levasseur et Pierre Torasso pour d'utiles discussions.

References

[1] Bass, H., *Algebraic group actions on affine spaces*, Contemporary. Math. Vol. **43** (1985), 1–23.

[2] Dadoc, J., *Polar coordinates induced by actions of compact Lie groups*, Transaction of the Amer. Math. Soc. **288** (1985), 125–137.

[3] Dadoc J., et V. Kac, *Polar representations*, Journal of Algebra **92** (1985), 504–524.

[4] Helgason, S., *A duality for symmetric spaces with application to group representations III. Tangent space analysis*, Advances in Math. **36** (1980), 297–323.

[5] —, "Differential geometry and symmetric spaces," Academic Press, 1962.

[6] Kac, V. G., *Some remarks on nilpotent orbits*, Journal of Algebra, **64** (1980), 190–213.

[7] Kostant, B., *Lie group representations on polynomial rings*, Amer. J. Math. **85** (1963), 327–402.

[8] Luna, D., *Sur les orbites fermées des groupes algébriques réductifs*, Invent. Math. **16** (1972), 1–5.

[9] Popov, V. L., *Modern developments in invariant theory*, Proc. Intern. Congr. Math. Berkley, California, 1986.

[10] Procesi C., et G. Schwartz, *Inequalities defining orbit spaces*, Invent. Math. **81** (1985), 539–554.

[11] Raïs, M., *Sur l'irréductibilité de certaines représentations induites non unitaires*, C.R.A.S. Paris **305** (1987), 713–716.

[12] Schlichtrull H., et H. Stetkaer, *Scalar irreducibility of eigenspaces on the tangent space of a reductive symmetric space*, J. Funct. Anal. **74** (1987), 292–299.

[13] Serre, J. P., "Algèbre locale et multiplicités," Lecture Notes Math. (Springer-Verlag) **11**, 1965.

[14] Stetkaer, H., *Scalar irreducibility of certain eigenspace representations*, J. Funct. Anal. **61** (1985), 295–306.

Abderrahim Khaoua
URA CNRS D 1322
"Groupes de Lie et Géométrie"
Laboratoire de Mathématiques
Université de Poitiers
40, Avenue du Recteur Pineau
86022 Poitiers Cedex
France
khaoua@mathrs.univ-poitiers.fr

Received July 16, 1997
and in final form October 24, 1998