Journal of Lie Theory
Volume **9** (1999) 425–459

Coefficients généralisés de séries principales sphériques relatifs aux espaces symétriques déployés

Mustapha Tinfou

Communicated by J. Faraut

Résumé. Soient G un groupe de Lie semi-simple connexe et H le sous-groupe des points fixes d'une involution non triviale de G. On suppose que G/H est déployé. Dans ce cas on calcule certains coefficients généralisés de la série principale sphérique de G en fonction de la matrice B introduite par E. van den Ban. Ensuite, grâce au front d'onde, on trouve une formule pour la matrice B qui correspond à l'élément de plus grande longueur du groupe de Weyl.

Mots-clé. Groupe de Lie semi-simple, Espace symétrique, front d'onde.

Abstract. Let G be a connected semisimple Lie group and H be the fixed point group for a non trivial involution of G. Assume G/H is split. In this case we compute some generalized coefficients of the spherical principal series of G in term of the B-matrix introduced by E. van den Ban. We use the wave front set to give a formula for the B-matrix corresponding to the longest element of the Weyl group.

AMS Classification. 20G05, 22E30, 43A85.

Key words. Semisimple Lie group, Symmetric space, Wave front set.

0. Introduction

Soient G un groupe de Lie semi-simple connexe et σ une involution non triviale de G. Soit θ une involution= de Cartan qui commute avec σ. On note H l'ensemble des points fixes de σ. On suppose que G/H admet un sous-espace de Cartan $\mathfrak{a}$ formé d'éléments hyperboliques. Soient $A := \exp \mathfrak{a}$ et $P := MAN$ un sous-groupe parabolique $\sigma\theta$-stable minimal de G. Si $\mathcal{W}$ est l'ensemble des (H, P)-doubles classes ouvertes dans G, on dispose d'une famille méromorphe ξ_λ^x, $x \in \mathcal{W}$, $\lambda \in \mathfrak{a}_{\mathbb{C}}^*$, de vecteurs distributions H-invariants de la série principale sphérique $(\pi_\lambda, I_\lambda^P)$. Pour λ générique, $x, y \in \mathcal{W}$, on définit le coefficient généralisé de I_λ^P correspondant à ξ_λ^x et $\xi_{-\lambda}^y$, $\Theta_\lambda^{x,y}$, par:

$$\forall \varphi \in C_c^\infty(G/H), \Theta_\lambda^{x,y}(\varphi) = \langle \pi'_\lambda(\varphi)\xi_\lambda^x, \xi_{-\lambda}^y \rangle,$$

ISSN 0949–5932 / \$2.50

où π'_λ est la contragrédiente de π_λ. En fait, $\Theta_\lambda^{x,y}$ est une distribution sphérique sur G/H. Si C_P est la chambre de Weyl de $\mathfrak{a}$ correspondant à P et z un élément du groupe de Weyl de $(\mathfrak{g}, \mathfrak{a})$, W, on note $\mathcal{C}_z := \exp(-zC_P)$. Pour tout $w \in W$, sur $\mathcal{C}_z wH$, $\Theta_\lambda^{x,y}$ est une fonction analytique et solution d'un système différentiel dont l'espace des solutions est de dimension $|W|$. On dispose d'une base, $\Phi(\mathcal{C}_z w, -u\lambda, .)$, $u \in W$, de cet espace. Ainsi

$$\forall a \in \mathcal{C}_z, \Theta_\lambda^{x,y}(awH) = \sum_{u \in W} c_w(x, y, \mathcal{C}_z, u, -\lambda)\Phi(\mathcal{C}_z w, -u\lambda, awH).$$

Dans la première partie de cet article, on détermine les coordonnées

$$c_w(x, y, \mathcal{C}_z, u, -\lambda)$$

en fonction de la matrice B introduite par van den Ban, en développant et modifiant une méthode utilisée par P. Delorme dans [7] lorsque G est un groupe complexe, H est une forme réelle de G admettant un sous-groupe de Cartan compact et $x = y = e$. En particulier, en contraste avec la méthode de P. Delorme, il est nécessaire de ne pas se limiter au cas où $x = y = e$. Ceci fait l'objet du théorème 2. Dans le cas des hyperboloïdes, le calcul de $\Theta_\lambda^{e,e}(aH)$ est contenu dans le travail de J. Faraut [10], th. 3.4 et prop. 7.5; le cas de $SL(n, \mathbb{R})/GL(n-1, \mathbb{R})$ est traité de façon similaire (cf. [19], th. 8.5 et [8], prop. 5.1). Plus généralement, pour le cas des espaces symétriques de rang 1, voir l'article de V.F Molchanov [20], §8. Le cas des espaces symétriques de type G/K_ε est traité dans [23]. Enfin, ce théorème permet de retrouver le théorème 5.1 de [13]. Dans la dernière partie de cet article, grâce au front d'onde, on décrit les coefficients de B, pour l'élément de W transformant N en $\theta(N)$, comme restriction à K (sous-groupe compact maximal de G) de produit de distributions sur G appliqué à 1_K (cf. th. 3).

1. Notations

Si X est un ensemble, on notera $|X|$ son cardinal. Si E est un espace vectoriel réel ou complexe on notera E^* son dual et $E_{\mathbb{C}}$ son complexifié s'il est réel. Si E est un espace vectoriel complexe et F un sous-espace vectoriel réel de E avec $F \cap iF = \{0\}$, on identifiera $F_{\mathbb{C}}$ à $F + iF \subset E$.
Si E est un espace vectoriel localement convexe séparé (e.l.c.s), on notera E' son dual topologique. Le crochet de dualité sera noté $\langle \cdot, . \rangle$ ou plus précisément $\langle \cdot, \rangle_{E,E'}$.
Si A est un opérateur continu de E dans F (avec E, F e.l.c.s), on notera A' le transposé de A qui envoie F' dans E'.
Si on a une représentation π d'un groupe de Lie G dans E, e.l.c.s, par des opérateurs continus, on notera π' la représentation contragrédiente définie par $\pi'(g) = (\pi(g^{-1}))'$. Si E est un espace de Hilbert (réel ou complexe) on notera $(,)$ le produit scalaire (linéaire en la première variable).
Si L est un groupe de Lie, on notera $\mathfrak{l}$ son algèbre de Lie, $U(\mathfrak{l})$ l'algèbre enveloppante de $l_{\mathbb{C}}$. L'action régulière gauche (resp. droite) de $D \in U(\mathfrak{l})$ (resp. $g \in G$) sur f, fonction C^∞ sur L, sera notée $L_D f$ (resp. $R_D f$, resp. $L_g f$, $R_g f$).
Si Q est un sous-groupe de L et Y est une partie de L ou $\mathfrak{l}$, on note $Z_Q(Y)$ le centralisateur de Y dans Q. Le centre de L sera noté $Z(L)$.
On notera L^0 la composante connexe de l'élément neutre de L. Si X est une

variété, on notera $\mathcal{D}(X) := C_c^\infty(X)$, $\mathcal{E}(X) := C^\infty(X)$ munis de leurs topologies usuelles et $\mathcal{D}'(X)$ (resp. $\mathcal{E}'(X)$) l'espace des distributions (resp. distributions à support compact) sur X. Si X est un groupe de Lie (resp. un espace homogène d' un groupe de Lie) muni d'une mesure de Haar (resp. invariante) à gauche, on identifie $\mathcal{E}(X)$ (resp. $\mathcal{D}(X)$) à un sous-espace de $\mathcal{D}'(X)$ (resp. $\mathcal{E}'(X)$).

2. Espaces symétriques réductifs déployés

Soit G un groupe de Lie semi-simple, connexe. On suppose que G est contenu dans un groupe de Lie connexe et simplement connexe $G_{\mathbb{C}}$, dont l'algèbre de Lie est $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$. Soient σ une involution de G non triviale et θ une involution de Cartan qui commute avec σ. On note H (resp. K) l'ensemble des points fixes de σ (resp. θ). On garde les mêmes notations, σ et θ, pour désigner les involutions correspondant respectivement à σ et θ. On note $\mathfrak{q}$ (resp. $\mathfrak{p}$) le sous-espace propre de σ (resp. θ) pour la valeur -1. On munit $\mathfrak{g}$ du produit scalaire défini par $(X,Y) := -\operatorname{tr}(\operatorname{ad} X \operatorname{ad} \theta(Y))$. On note de même son prolongement sesquilinéaire à $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$.
Soit $\mathfrak{a}$ un sous-espace abélien maximal dans $\mathfrak{p}\cap\mathfrak{q}$. On note $\Delta := \Delta(\mathfrak{g}, \mathfrak{a})$ l'ensemble des poids non nuls de $\mathfrak{a}$ dans $\mathfrak{g}$. C'est un système de racines (cf. [25], §7.2). On fixe un ensemble de racines positives, Δ^+, de Δ. On désigne par Σ l'ensemble des racines simples de Δ^+. Soit $\mathfrak{n} := \bigoplus_{\alpha\in\Delta^+} \mathfrak{g}^\alpha$ où $\mathfrak{g}^\alpha$ est le sous-espace radiciel de $\mathfrak{g}$ correspondant à la racine α de $\mathfrak{a}$.On note L le centralisateur de $\mathfrak{a}$ dans G. Soit $\mathfrak{m}$ l'orthogonal de $\mathfrak{a}$ dans $\mathfrak{l}$, alors $\mathfrak{m}\cap\mathfrak{p}$ est inclus dans $\mathfrak{h}$. On désigne respectivement par N, A et M^0 les sous-groupes analytiques de G d'algèbres de Lie $\mathfrak{n}$, $\mathfrak{a}$ et $\mathfrak{m}$. Soit $\mathfrak{a}_h$ un sous-espace abélien maximal de $\mathfrak{m}\cap\mathfrak{p}$ et $\mathfrak{a}_p := \mathfrak{a}\oplus\mathfrak{a}_h$, alors $\mathfrak{a}_p$ est un sous-espace abélien maximal dans $\mathfrak{p}$, σ-stable et $\mathfrak{a}_p\cap\mathfrak{h} = \mathfrak{a}_h$ (cf. [21], p.608).
On pose $F := K\cap\exp(i\mathfrak{a}_p)$ et $M := FM^0$. Alors les éléments de F sont d'ordre 2 et M est un groupe réductif fermé σ et θ -stable. Le sous-groupe de G, $P := MAN$, est un sous-groupe parabolique $\sigma\theta$- stable (cf. [21], p. 608). On note ρ la forme linéaire sur $\mathfrak{a}$ définit par:

$$\forall X\in\mathfrak{a}, \rho(X) = \frac{1}{2}\operatorname{tr}(\operatorname{ad} X|_{\mathfrak{n}}).$$

On fixe une sous-algèbre de Cartan $\mathfrak{j}$ de $\mathfrak{g}$, σ et θ -stable, qui contient $\mathfrak{a}_p$ (cf. [5], §2.1 pour l'existence). Les décompositions $\mathfrak{a}_p = \mathfrak{a}\oplus\mathfrak{a}_h$ et $\mathfrak{j} = \mathfrak{a}_p\oplus(\mathfrak{j}\cap\mathfrak{k})$ permettent d'identifier $\mathfrak{a}^*$ et $\mathfrak{a}_p^*$ à des sous-espaces respectivement de $\mathfrak{a}_p^*$ et $\mathfrak{j}^*$. On choisit un ensemble de racines positives $\Delta^+(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}, \mathfrak{j}_{\mathbb{C}})$ du système de racines de $\mathfrak{j}_{\mathbb{C}}$ dans $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$, $\Delta(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}, \mathfrak{j}_{\mathbb{C}})$, compatible avec Δ^+. Pour $\alpha\in\Delta(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}, \mathfrak{j}_{\mathbb{C}})$ on note $\sigma\alpha := \alpha\circ\sigma|_{\mathfrak{j}_{\mathbb{C}}}$. On note

$$\Delta_{*j} := \{\alpha\in\Delta(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}, \mathfrak{j}_{\mathbb{C}}) : \alpha|_{\mathfrak{a}} \neq 0\}.$$

On note W le groupe de Weyl de $\Delta(\mathfrak{g}, \mathfrak{a})$ qu'on identifie au quotient de $N_K(\mathfrak{a})$ par $Z_K(\mathfrak{a})$ (cf.[1], lemme 1.2). Si $w\in W$, il admet un représentant dans $N_K(\mathfrak{a})$ qui normalise $\mathfrak{j}$ (cf. [21], p.608). On note W_H l'image dans W de $N_{K\cap H}(\mathfrak{a})$.
Si C est une chambre de $\mathfrak{a}$ relativement à Δ, on note $\mathcal{C} := \exp(C)$. La chambre qui correspond à Σ sera notée C_P. On notera w_0 l'unique élément de W qui transforme Δ^+ en $-\Delta^+$.

On note $\mathfrak{g}^+ := (\mathfrak{k} \cap \mathfrak{h}) \oplus (\mathfrak{p} \cap \mathfrak{q})$ qui n'est autre que l'ensemble des points fixes de $\sigma\theta$. C'est une algèbre de Lie réductive.

Dans ce paragraphe on peut se référer à ([21], §2). Si $\alpha \in \Delta$, on note:

$$\Delta(\alpha) := \{\beta \in \Delta(\mathfrak{g}, \mathfrak{a}_p) : \beta|_{\mathfrak{a}} = \alpha\} \text{ et } r_\alpha := \max_{\beta \in \Delta(\alpha)} (|\beta|/|\alpha|)^2,$$

alors $r_\alpha \in \{1, 2, 4\}$ (cf. [21], lemme 2.3). Soient $\alpha_1, \cdots, \alpha_l$ les éléments de Σ. On désigne par d_i, $i = 1, \cdots, l$, le maximum de $\{r_{\alpha_i}, 2r_{2\alpha_i}\}$ si $2\alpha_i \in \Delta$, et r_{α_i} sinon.

Soit $\mu_i \in \mathfrak{a}^*$ tel que:

$$(\mu_i, \alpha_j) = d_j \|\alpha_j\|^2 \delta_{ij}$$

que l'on regarde comme élément de $\mathfrak{j}_{\mathbb{C}}^*$, grâce à l'égalité $\mathfrak{j} = (\mathfrak{j} \cap \mathfrak{h}) \oplus \mathfrak{a}$. Alors μ_i est un poids entier dominant relativement à $\Delta^+(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}, \mathfrak{j}_{\mathbb{C}})$. Soit (π_i, V_i) la représentation irréductible holomorphe de $G_{\mathbb{C}}$, de plus haut poids μ_i. On munit V_i d'un produit scalaire invariant par le sous-groupe analytique de $G_{\mathbb{C}}$ d'algèbre de Lie $\mathfrak{k} \oplus i\mathfrak{p}$. Alors pour $g \in G$, $\pi_i(g)^* = \pi_i(\theta(g^{-1}))$ et deux sous-espaces de poids sous $\mathfrak{a}$ de V_i pour des poids distincts sont orthogonaux. De plus π_i admet un vecteur H-invariant non nul, u_i, et un vecteur unitaire K-invariant, e_i^K. Soit v_i un vecteur unitaire de V_i de plus haut poids μ_i sous $\mathfrak{j}$. On peut supposer que $(u_i, v_i) = 1$. Pour tout $i = 1, \cdots, l$, on définit les fonctions, ε_i, de G par :

$$\forall g \in G, \varepsilon_i(g) = (\pi_i(g)v_i, u_i).$$

On rappelle que si $\mathcal{W}$ est un ensemble de représentants de $W_H \setminus W$, $\{HwP : w \in \mathcal{W}\}$ est un ensemble de représentants des doubles classes ouvertes de G modulo (H, P) (cf. [1], prop. B.1). De plus les fonctions ε_i sont analytiques et on a:

$$G \setminus \bigcup_{i=1}^{l} HwP = \{g \in G : \prod_{i=1}^{l} \varepsilon_i(g) = 0\}$$

(cf. [21], th.2.5). Montrons le résultat suivant:

Lemme 1. *Pour tout $i = 1, \cdots, l$, v_i est M-invariant et ε_i est invariant à droite par M.*

Démonstration. En effet, v_i est invariant sous le groupe analytique de $G_{\mathbb{C}}$ d'algèbre de Lie $\mathfrak{m}_{\mathbb{C}}$ (même preuve que [5], lemme 2 (v)), donc par M^0. De plus il l'est aussi par F (cf. [21], p.611). Donc il est M-invariant. Ceci joint à la définition de ε_i donne le résultat voulu. ∎

On rappelle que si $\mathfrak{b}$ est un sous-espace abélien maximal de $\mathfrak{q}$ formé d'éléments semi-simples, le sous-ensemble de Cartan de G/H associé à $\mathfrak{b}$ est par définition $\{gH \in G/H : g\sigma(g^{-1}) \in Z_G(\mathfrak{b})\}$. Soit $\mathcal{A}$ le sous-ensemble de Cartan de G/H correspondant à $\mathfrak{a}$.

Hypothèse. *Dans toute la suite de l'article, sauf mention expresse du contraire, on supposera que $\mathfrak{a}$ est abélien maximal dans $\mathfrak{q}$. Dans ce cas on dit que l'espace symétrique G/H est déployé.*

Remarque 1. *Si G/H est déployé alors $\mathfrak{m} \cap \mathfrak{q} = 0$, donc $\mathfrak{m}$, qui est égal à $(\mathfrak{m} \cap \mathfrak{h}) \oplus (\mathfrak{m} \cap \mathfrak{q})$ (car $\mathfrak{m}$ est σ-stable), est contenu dans $\mathfrak{h}$. Donc M^0 est inclus dans H.*

Lemme 2. *Soient $w \in N_K(\mathfrak{a})$ et $t_w := \sigma(w^{-1})w$. On a:*

(i) *$t_w \in \exp(i\mathfrak{a}) \cap H \cap K$. En particulier $t_w \in Z_{F\cap H}(M)$.*

(ii) *w normalise $H \cap M$.*

(iii) *Pour tout $i \in \{1, \cdots, l\}$ on a $\varepsilon_i^2(w) = 1$.*

Démonstration.
(i) Pour $w \in N_K(\mathfrak{a})$ et $a \in A$, on a $wa^{-1}w^{-1} \in A$. Donc

$$\sigma(wa^{-1}w^{-1}) = waw^{-1}.$$

D'autre part on a:

$$\sigma(wa^{-1}w) = \sigma(w)a\sigma(w)^{-1}.$$

Donc:

$$waw^{-1} = \sigma(w)a\sigma(w)^{-1}.$$

On en déduit que $t_w \in Z_K(A) = K \cap M$. En outre comme t_w est de la forme $g\sigma(g^{-1})$, il résulte du lemme 1.1 de [24] que $t_w \in \exp(\mathfrak{a}_{\mathbb{C}})$. D'où $t_w \in Z(M)$ et $\theta(t_w) = t_w^{-1}$. D'autre part, puisque $t_w \in K$, on a $\theta(t_w) = t_w$. Cela montre que $t_w^2 = e$, c'est à dire que $t_w = t_w^{-1}$. Mais $\sigma(t_w) = t_w^{-1}$. On en déduit que $t_w \in H$. Comme $\exp(i\mathfrak{a})$ est l'ensemble des éléments de $\exp(\mathfrak{a}_C)$ dont le carré est e, on en déduit que $t_w \in \exp i\mathfrak{a} \cap H \cap K$.
(ii) D'après (i) on a, pour tout $m \in H \cap M$, $\sigma(w^{-1})wmw^{-1}\sigma(w) = m$, c'est à dire pour tout $m \in H \cap M$ $\sigma(wmw^{-1}) = wmw^{-1}$. De plus w normalise M, donc w normalise $H \cap M$.
(iii) Il découle de l'holomorphie de π_i que la fonction, f_i, définie dans G par $f_i(g) = (\pi_i(\sigma(g^{-1})g)v_i, v_i)$ est analytique. Il est clair que f_i est invariante à gauche par H. Comme v_i est MN-invariant (cf. lemme 1) et $\sigma\theta(N) = N$, notre choix du produit scalaire sur V_i (cf. §2.1) montre que f_i est invariante à droite par MN. En outre f_i coïncide avec ε_i^2 sur A. On en déduit que f_i et ε_i^2 coïncident sur HP qui est un ouvert de G. Comme G est connexe, l'égalité des fonctions analytiques:

$$\varepsilon_i^2 = f_i \tag{2.1}$$

en résulte. Comme $t_w \in M$, d'après (i), et v_i est un vecteur unitaire M-invariant, d'après (2.2.1), on a:

$$\forall w \in W, f_i(w) = 1. \tag{2.2}$$

Alors (iii) résulte de (2.1) et (2.2). ■

Proposition 1. a) *Pour $w,\ w' \in N_K(\mathfrak{a})$, les propriétés suivantes sont équivalentes:*

(i) $AwH = Aw'H$.

(ii) $AwH \cap Aw'H \neq \emptyset$.

(iii) $w^{-1}w' \in N_{K\cap H}(\mathfrak{a})$.

b) *Si $\mathcal{L}$ est un ensemble de représentants de $N_K(\mathfrak{a})/N_{K\cap H}(\mathfrak{a})$ alors $\mathcal{L}$ est fini et on a:*

$$\mathcal{A} = \bigcup_{w\in\mathcal{L}} AwH \text{ (réunion disjointe).}$$

Démonstration.
a) Il est clair que (i) $\Longrightarrow$ (ii). Montrons que (ii) $\Longrightarrow$ (iii):
Si $AwH \cap Aw'H \neq \emptyset$, il existe $a \in A, h \in H$ tels que: $w' = awh$, d'où $\sigma(w')w'^{-1} = a^{-1}\sigma(w)w^{-1}a^{-1}$, et d'après le lemme 1 ceci implique que :

$$t_{w'^{-1}} = t_{w^{-1}}a^{-2}. \tag{2.3}$$

Comme $MA \cap K = K \cap M$, (2.3) implique que $a^{-2} = e$, et $a = e$ puisque A est un groupe vectoriel. Donc $w' = wh$, ce qui montre que $w^{-1}w' \in N_{K\cap H}(\mathfrak{a})$.
Maintenant (iii) implique (i). En effet, si $w^{-1}w' \in N_{K\cap H}(\mathfrak{a})$, on a $AwH = Aw(w^{-1}w')H$. Donc $AwH = Aw'H$. Ceci achève la démonstration de a).
b) Si $gH = awH$ avec $a \in A,\ w \in \mathcal{L}$, on a:

$$\sigma(g)g^{-1} = a^{-1}t_{w^{-1}}a^{-1}.$$

Mais d'après le lemme 1, $t_{w^{-1}}$ est élément de M. On a donc :

$$\sigma(g)g^{-1} = t_{w^{-1}}a^{-2} \in Z_G(\mathfrak{a}),$$

c'est à dire $g \in \mathcal{A}$. Finalement on obtient:

$$\bigcup_{w\in\mathcal{L}} AwH \subset \mathcal{A}$$

Montrons l'inclusion inverse. On rappelle qu'il existe $m \in \mathbb{N}$ et $k_1, \dots, k_n \in K$ tels que:

$$\mathcal{A} = \bigcup_{i=1}^{m} Ak_iH, \tag{2.4}$$

(cf.[22], proposition 1). La définition de $\mathcal{A}$ montre que $k_i\sigma(k_i^{-1})$ centralise $\mathfrak{a}$. Il suffit de montrer que si $k \in K$ est tel que $k\sigma(k^{-1})$ centralise $\mathfrak{a}$, il existe $w \in N_K(\mathfrak{a}),\ h \in H$ tels que $k = wh$. Donnons-nous un tel k. Soit $X \in \mathfrak{a}$, alors on a:

$$\mathrm{Ad}(k\sigma(k^{-1}))X = X.$$

D'où:

$$\mathrm{Ad}(\sigma(k^{-1}))X = Ad\ (k^{-1})X.$$

D'autre part comme $\sigma(X) = -X$, on a:

$$\mathrm{Ad}(\sigma(k^{-1}))X = -\sigma(\mathrm{Ad}(k^{-1})X).$$

On en déduit que:

$$\sigma(\mathrm{Ad}(k^{-1})X) = -Ad\ (k^{-1})X.$$

Donc $\mathrm{Ad}(k^{-1})X$ est élément de $\mathfrak{q}$. Mais comme $X \in \mathfrak{p}$ et $k \in K$, on a aussi $\mathrm{Ad}(k^{-1})X \in \mathfrak{p}$. Ceci montre que $\mathrm{Ad}(k^{-1})\mathfrak{a} \subset \mathfrak{p} \cap \mathfrak{q}$, et par conséquent $\mathrm{Ad}(k^{-1})\mathfrak{a}$ est un sous-espace abélien maximal dans $\mathfrak{p} \cap \mathfrak{q}$. Si on considère l'algèbre réductive $\mathfrak{g}^+ := (\mathfrak{k} \cap \mathfrak{h}) \oplus (\mathfrak{p} \cap \mathfrak{q})$, on en déduit qu'il existe $h \in K \cap H$ tel que $\mathrm{Ad}(k^{-1})\mathfrak{a} = \mathrm{Ad}(h^{-1})\mathfrak{a}$, d'où $kh^{-1} \in N_K(\mathfrak{a})$, et $k = wh$ avec $w \in N_K(\mathfrak{a})$.

Appliquant cela aux k_i et utilisant (a), on obtient:

$$\mathcal{A} \subset \bigcup_{w \in N_K(\mathfrak{a})} AwH = \bigcup_{w \in \mathcal{L}} AwH.$$

D'où on déduit de cela l'égalité voulue. La réunion est disjointe d'après (a), et avec les notations de la démonstration de (a) on a immédiatement $\mid \mathcal{L} \mid \leq m$. Donc $\mathcal{L}$ est fini. ∎

Le produit scalaire sur $\mathfrak{g}$ introduit en 2.2 permet de sélectionner sur les sous-groupes de Lie de G une mesure de Haar à gauche qu'on appellera mesure standard (cf. [14], §7).
Si $L \subset G$ est compact, la mesure ainsi sélectionnée ne sera pas en général de masse totale 1. On notera $\mathrm{vol}(L)$ cette masse. On appelera mesure normalisée la mesure de Haar sur L de masse totale 1.
A l'exception des sous-groupes K et $K \cap M$ de G pour lesquels on utilisera les mesures normalisées (notées dk, dm_k), on utilisera les mesures à gauche standards (sauf mention expresse du contraire) qu'on note dl pour un sous-groupe L. Si $Q \subset L$ sont des sous-groupes de Lie G et s'il existe une mesure invariante à gauche sur L/Q, on notera $d\dot{l}$ celle qui vérifie:

$$\forall f \in C_c(L), \int_L f(l)dl = \int_{L/Q} (\int_Q f(lq)dq)d\dot{l}.$$

Si $x = \exp X$ avec $X \in \mathfrak{a}_{\mathbb{C}}$ et α un poids de $\mathfrak{a}$, on note $x^\alpha := e^{\alpha(X)}$. Soit w un élément de W, C une chambre de Weyl de $\mathfrak{a}$ et $\mathcal{C} := \exp C$. On définit une application F_w de $(H/H \cap M) \times \mathcal{C}$ dans G/H par: $F_w(h(H \cap M), a) = hwaH$. Il découle de [24], propositions 1.2 et 1.3 que:

> *F_w est un difféomorphisme sur son image qu'on note Ω_w qui est un ouvert de G/H. De plus il existe une constante positive, C_G, indépendante de $\mathcal{C}$ et de w, telle que pour tout $\varphi \in C_c(\Omega_w)$ on ait:*
> $\int_{\Omega_w} \varphi(gH)d\dot{g} = C_G \int_{H/H\cap M} \int_{\mathcal{C}} \varphi(hwaH)D_w(a)dad\dot{h}$ *où*
> $D_w(a) = \prod_{\alpha \in \Delta^+} \mid a^{-\alpha} - a^\alpha t_w^\alpha \mid^{m_\alpha}$, *et* $m_\alpha = \dim \mathfrak{g}_{\mathbb{C}}^\alpha$.

Remarque 2. *On voit grâce à (2.1) que F_w induit un difféomorphisme entre $\mathcal{C}$ et l'ouvert de $\mathcal{A}$, $w\mathcal{C}H$. Donc on peut choisir la mesure, db, sur $w\mathcal{C}H$ tel qu'on ait:*

$$\int_{w\mathcal{C}H} \varphi(b)db = \int_{\mathcal{C}} \varphi(waH)da.$$

3. Vecteurs distributions H-invariants de séries principales sphériques

Pour $\lambda \in \mathfrak{a}^*_{\mathbb{C}}$, on note $I_\lambda := \{f\colon G \to \mathbb{C} \mid \ f \text{ est } C^\infty \text{et } f(gman) = a^{-\lambda-\rho}f(g), \forall (g,m,a,n) \in G \times M \times A \times N\}$ et π_λ la représentation régulière gauche de G dans I_λ. On note $I = \mathcal{E}(K/K \cap M)$. Si $f \in I_\lambda$, on notera $\tilde{f}$ sa restriction à K, qui est invariante à droite par $K \cap M$. Cette dernière induit un isomorphisme de K-modules entre I_λ et I. Le dual de I_λ, $(I_\lambda)'$, contient $I_{-\lambda}$ (cf. [1], §3) et même $C_{-\lambda} := \{f\colon G \to \mathbb{C} \mid \ f \text{est continue et} f(gman) = a^{\lambda-\rho}f(g),\ \forall (g,\ m,\ a,\ n) \in G \times M \times A \times N\}$ sur lequel agit G par représentation régulière gauche. De plus $(\pi_\lambda)'$ laisse stable $I_{-\lambda}$ et $C_{-\lambda}$, et coïncide sur $I_{-\lambda}$ avec $\pi_{-\lambda}$ et sur $C_{-\lambda}$ avec l'action régulière gauche. De même $(\pi_\lambda)'$ coïncide sur I avec $\tilde{\pi}_{-\lambda}$. Le transposé de l'opérateur $I_\lambda \to I$ (resp. $I \to I_\lambda$) défini par $f \mapsto \tilde{f}$ (resp. $f \mapsto f_\lambda$) sera noté $T \in I' \to T_{-\lambda} \in (I_{-\lambda})'$ (resp. $T \in (I_\lambda)' \to \tilde{T} \in I'$), ces notation sont compatibles avec les identifications et notations antérieures.

Soit $\lambda \in \mathfrak{a}^*_{\mathbb{C}}$, alors $\lambda - \rho = \sum_{i=1}^{l} \lambda_i \mu_i$ pour des $\lambda_i \in \mathbb{C}$. On suppose que pour tout $i = 1, \ldots, l$, $\Re(\lambda_i) > 0$, c'est à dire $\Re(\lambda - \rho)$ est strictement Δ^+-dominant. On définit, pour $w \in W$ ou $W_H \setminus W$, des fonctions, ξ^w_λ, sur G par:

$$\begin{aligned} \xi^w_\lambda(g) &= \prod_{i=1}^{l} \mid \varepsilon_i(g) \mid^{\lambda_i} \text{ si } g \in HwP, \\ &= 0 \text{ sinon.} \end{aligned}$$

Il est clair que les fonctions ε_i sont continues et ne s'annulent pas sur les (H, P)-doubles classes ouvertes de G (cf. lemme 1 (iii) et [21], th.2.5), donc ξ^w_λ est continue. En outre les propriétés d'invariance des ε_i montrent que $\xi^w_\lambda \in C_{-\lambda} \subset I'_\lambda$. C'est un élément H-invariant de I'_λ sous π'_λ qui est propre sous l'action de $U(\mathfrak{g})^{\mathfrak{h}}$ (cf. [21], th.5.1). Sa restriction à K (où à $K/K \cap M$) est une distribution notée $\tilde{\xi}^w_\lambda$.

La fonction $\lambda \mapsto \tilde{\xi}^w_\lambda$, définie pour $\lambda \in \mathfrak{a}^*_{\mathbb{C}}$ tel que $\Re(\lambda - \rho)$ est Δ^+-dominant et à valeurs dans $\mathcal{D}'(K/M \cap K) = I'$, s'étend en une fonction méromorphe (cf. [21], th 5.1). D'après [21], th. 5.1, les singularités sont situées sur une famille localement finie d'hyperplans de $\mathfrak{a}^*_{\mathbb{C}}$. On notera de la même façon les prolongements méromorphes des $\tilde{\xi}^w_\lambda$. On désigne par ξ^w_λ, lorsque $\tilde{\xi}^w_\lambda$ est défini, l'élément de I'_λ tel que $(\xi^w_\lambda)\tilde{} = \tilde{\xi}^w_\lambda$. On se fixe deux éléments, x et y, de W. Lorsque ξ^x_λ et $\xi^y_{-\lambda}$ sont définis, pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(G/H)$ on a $\pi'_\lambda(\varphi)(\xi^x_\lambda) \in I_{-\lambda}$ et l'expression $\langle \pi'_\lambda(\varphi)\xi^x_\lambda, \xi^y_{-\lambda}\rangle_{I_{-\lambda}, I'_{-\lambda}}$ a un sens et permet de définir une distribution notée $\Theta^{x,y,P}_\lambda$ (ou plus simplement $\Theta^{x,y}_\lambda$ quand il n'y a pas d'ambiguïté) par

$$\Theta^{x,y}_\lambda(\varphi) = \langle \pi'_\lambda(\varphi)\xi^x_\lambda, \xi^y_{-\lambda}\rangle_{I_{-\lambda}, I'_{-\lambda}}$$

que nous nous proposons d'étudier.

On se donne une chambre de Weyl, C, de $\mathfrak{a}$ relativement à Δ et $\mathcal{C} := \exp C$. On reprend les notations de (2.1). On se donne $\psi \in \mathcal{D}(H/M \cap H)$ et $\varphi \in \mathcal{D}(\mathcal{C})$. Grâce à (2.1), on définit une fonction $\Phi^w(\psi, \varphi) \in \mathcal{D}(G/H)$, à support dans $\Omega_w(C)$, par:

$$\begin{aligned}\Phi^w(\psi,\varphi)(hwaH) &= \psi(h)\varphi(a) \text{ si } h\in H,\ a\in\mathcal{C},\\ &= 0 \text{ si } gH\notin\Omega_w(C)\end{aligned}$$

On se fixe $X_0\in -C$ et on note $a_t=\exp\ tX_0,\ t>0$. On définit pour $t>0$, $\varphi_t\in\mathcal{D}(\mathcal{C})$ par:

$$\begin{aligned}\forall a\in\mathcal{C},\ \varphi_t(a) &= \varphi(aa_t) \text{ si } aa_t\in\mathcal{C},\\ &= 0 \text{ sinon.}\end{aligned}$$

On pose: $\Phi_t^w:=\Phi^w(\psi,\varphi_t)$.

Si $z\in W$, pour $i=1,\ldots,\ l$, on note $\eta_{i,z}$, la fonction définie sur G par:

$$\forall g\in G,\ \eta_{i,z}(g)=(\pi_i(g)v_i,\pi_i(z)v_i)$$

qui est continue. On rappelle que $\lambda-\rho=\sum_{i=1}^{l}\lambda_i\mu_i$. Alors pour $\Re(\lambda-\rho)$ Δ^+-dominant la fonction $\eta_{\lambda,z}$ sur G définie par:

$$\forall g\in G,\ \eta_{\lambda,z}(g)=\prod_{i=1}^{l}\mid\eta_{i,z}(g)\mid^{\lambda_i},$$

est un élément de $C_{-\lambda}\subset I'_\lambda$.
On a un théorème analogue au théorème 1 de [7]:

Théorème 1. *On se fixe w, x et $z\in W$. On suppose que $C=-zC_P$. Soient $X_0\in -C$ et $a_t=\exp tX_0$. Soient $\psi\in\mathcal{D}(H/H\cap M)$, $\varphi\in\mathcal{D}(\mathcal{C})$. Pour λ tel que $\Re(\lambda-\rho)$ est strictement Δ^+- dominant on a (avec les notations du §2 et du §3:*

$$\lim_{t\to+\infty}a_t^{-z(\lambda+\rho)}\pi'_\lambda(\Phi_t^w(\psi,\varphi))\xi_\lambda^x=C_Gu_{\lambda,z}^{w,\ x}$$

avec

$$u_{\lambda,z}^{w,\ x}=\begin{cases}\int_{H/H\cap M}\int_{\mathcal{C}}\psi(\dot h)\varphi(a)a^{-2z\rho}\pi'_\lambda(hwa)\eta_{\lambda,z}d\dot hda & si\ zx^{-1}\in W_H,\\ 0 & sinon.\end{cases}$$

Les convergences ont lieu dans $I_{-\lambda}$.

Le schéma de la démonstration de ce théorème est le même que celui du théorème 1 de [7], on va appliquer le lemme 3 de [7] à:

$$f_t=(a_t^{-z(\lambda+\rho)}\pi'_\lambda(\Phi_t^w(\psi,\varphi))\xi_\lambda^x)\check{}\in I.$$

On note $A^{reg}:=\{expX:\ X\in\mathfrak{a},\ \forall\alpha\in\Delta,\ \alpha(X)\neq 0\}$ et $\mathcal{R}_z$ l'algèbre à élément unité des fonctions sur A^{reg}, engendrée par les fonctions $(1-ua^{2\alpha})^{-1}$, a^α où $\alpha\in z\Delta^+$ et $u\in\mathbb{C}$ avec $\mid u\mid=1$.
Comme $M\cap H$ n'est pas compact, il nous faut être plus précis que dans [7], preuve de la proposition 4.

Lemme 3. (i) *Soient* ($Z_1, \dots, Z_s$) *une base de* $\mathfrak{h}$ *et* $(V_1, \dots, V_r)$ *une base de* $\mathfrak{m}^\perp \cap \mathfrak{h}_w$ *où* $\mathfrak{h}_w = \mathrm{Ad}(w^{-1})\mathfrak{h}$. *Soient* $X \in \mathfrak{g}$ *et* Y *sa projection dans* $\mathfrak{a}$ *relativement à la décomposition* $\mathfrak{g} = \mathfrak{h}_w \oplus \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{n}_z$ *où* $\mathfrak{n}_z := \mathrm{Ad}(z)(\mathfrak{n})$. *Alors il existe* $\tau_1, \dots, \tau_r,\ \nu_1, \dots,\ \nu_s \in \mathcal{R}_z$ *tels que:*

$$\forall a \in A^{reg},\ X = \sum_{i=1}^{r} \tau_i(a) V_i + \sum_{j=1}^{s} \nu_j(a)\,\mathrm{Ad}(a)(Z_j) + Y.$$

(ii) *Pour tout* a *élément de* A^{reg} *on a:*

$$\mathfrak{g} = (\mathfrak{m}^\perp \cap \mathfrak{h}_w) \oplus \mathfrak{a} \oplus \mathrm{Ad}(a)\mathfrak{h}$$

Démonstration.
(i) On a $\mathfrak{g} = \mathfrak{h}_w \oplus \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{n}_z$ et $\mathfrak{g}_\mathbb{C} = (\mathfrak{h}_w)_\mathbb{C} \oplus \mathfrak{a}_\mathbb{C} \oplus \mathfrak{n}_{z\mathbb{C}}$. De plus $\mathfrak{m}$ est inclus dans $\mathfrak{h}_w$. Il est clair que (i) est vérifié si $X \in \mathfrak{a}$. Si $X \in \mathfrak{h}_w$, il s'ecrit $X = X_1 + X_2$ où $X_1 \in \mathfrak{m}^\perp \cap \mathfrak{h}_w$ et $X_2 \in \mathfrak{m} \subset \mathfrak{h}$.
Par linéarité et en complexifiant, il reste à démontrer (i) pour $X \in \mathfrak{g}_\mathbb{C}^\alpha$ où α décrit les éléments de $z\Delta^+(\mathfrak{g}_\mathbb{C}, \mathfrak{j}_\mathbb{C})$ où z est un représentant de z qui normalise $\mathfrak{j}_\mathbb{C}$. On note $\sigma' := \mathrm{Ad}(w^{-1}) \circ \sigma \circ \mathrm{Ad}(w)$. C'est une involution de $\mathfrak{g}$ dont l'ensemble des points fixes est $\mathfrak{h}_w$.
Si $X \in \mathfrak{g}$ on a:

$$\begin{aligned} \sigma'(X) &= \mathrm{Ad}(w^{-1})(\sigma(\mathrm{Ad}(w)X)) \\ &= \mathrm{Ad}(w^{-1})(\mathrm{Ad}(\sigma(w))\sigma(X)) \\ &= \mathrm{Ad}(t_w^{-1})\sigma(X). \end{aligned}$$

En particulier si $X \in \mathfrak{g}_\mathbb{C}^\alpha$, comme $\sigma(X)$ est un élément de $\mathfrak{g}_\mathbb{C}^{\sigma\alpha}$, on a:

$$\sigma'(X) = t_w^{-\sigma\alpha}\sigma(X).$$

Mais, d'après le lemme 1 (i), $t_w = t_w^{-1} \in H$, donc:

$$\sigma'(X) = t_w^{\alpha}\sigma(X).$$

Posons $Z = X + \sigma(X) \in \mathfrak{h}_\mathbb{C}$ et $V = X + \sigma'(X) \in (\mathfrak{h}_w)_\mathbb{C}$, alors

$$\mathrm{Ad}(a)Z = a^\alpha X + a^{-\alpha}\sigma(X)$$

et

$$V = X + t_w^\alpha \sigma(X),$$

donc

$$X = \frac{1}{1 - t_w^\alpha a^{2\alpha}} V - \frac{t_w^\alpha a^\alpha}{1 - t_w^\alpha a^{2\alpha}}\,\mathrm{Ad}(a)Z.$$

Or d'après le lemme 1 (i) $t_w^2 = e$, donc $(t_w^\alpha)^2 = 1$. En décomposant V dans la base (V_i) et Z dans la base (Z_j), on obtient (i).
(ii) On a d'après (i), $\mathfrak{g} = (\mathfrak{m}^\perp \cap \mathfrak{h}_w) + \mathfrak{a} + \mathrm{Ad}(a)\mathfrak{h}$. Montrons que cette somme est directe. En effet il suffit de montrer que les deux membres ont même dimension. Comme w normalise $\mathfrak{m}^\perp$, $\mathfrak{m}^\perp \cap \mathfrak{h}_w = \mathrm{Ad}(w)(\mathfrak{m}^\perp \cap \mathfrak{h})$. De plus, si pour chaque

$\alpha \in \Delta_{*j}^{+}$ (cf. §2.1), on choisit un élément non nul $X_\alpha \in \mathfrak{g}^\alpha$, et si on note $Y_\alpha = X_\alpha + \sigma(X_\alpha)$, la famille d'éléments $(Y_\alpha)_{\alpha\in\Delta_{*j}^{+}}$ forme une base de $(\mathfrak{m}^\perp \cap \mathfrak{h})_{\mathbb{C}}$. Il en résulte que $\dim \mathfrak{m}^\perp \cap \mathfrak{h} = \dim \mathfrak{n}$. Ceci joint à l'égalité $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{n}$ donne:

$$\dim \mathfrak{g} = \dim(\mathfrak{m}^\perp \cap \mathfrak{h}_w) + \dim \mathfrak{a} + \dim \mathrm{Ad}(a)\mathfrak{h}.$$

Ceci achève la démonstration du lemme. ■

Proposition 2. *Avec les notations du §3.2, si $D \in U(\mathfrak{g})$, il existe $p \in \mathbb{N}^*$, $U_1, \ldots, U_p \in U(\mathfrak{h})$, $Y_1, \ldots, Y_p \in U(\mathfrak{a})$, $\psi_1, \ldots, \psi_p \in \mathcal{D}(H/H \cap M)$, $\varphi_1, \ldots, \varphi_p \in \mathcal{R}_z$ tels que:*

$$\forall \psi \in \mathcal{D}(H/H \cap M),\ \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathcal{C}),$$
$$L_D \Phi^w(\psi, \varphi) = \sum_{i=1}^{p} \Phi^w(\psi_i(L_{U_i}\psi), \varphi_i(L_{Y_i}\varphi)).$$

Démonstration. Un argument de récurrence sur le degré de D et le lemme 3 de [7], montre qu'il suffit de démontrer la proposition pour $D \in \mathfrak{g}$. Soit $X \in \mathfrak{g}$. Il est clair que $L_X \Phi^w(\psi, \varphi)$ est nulle en dehors de $\Omega_w(C)$. Soient $(X_1, \ldots, X_l)$ une base de $\mathfrak{a}$ et $(X_{l+1}, \ldots, X_n)$ une base de $\mathfrak{h}_w \oplus (\mathrm{Ad}(z))\mathfrak{n}$, alors pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$, il existe $\nu_1, \ldots, \nu_n \in \mathcal{E}(H)$ tels que pour tout $h \in H$

$$\mathrm{Ad}((hw)^{-1})X = \sum_{i=1}^{l} \nu_i(h) X_i + \sum_{i=l+1}^{n} \nu_i(h) X_i.$$

On se fixe une base $(V_1, \ldots, V_r)$ de $\mathfrak{m}^\perp \cap \mathfrak{h}_w$, comme dans le lemme 2, et en appliquant ce dernier aux X_i, on en déduit qu'il existe $\varphi_{i,\ j} \in \mathcal{R}_z$ tels que:

$$\forall a \in A^{reg},\ \forall h \in H, \quad \mathrm{Ad}((hw)^{-1})X = V(h,\ a) + Y(h) + \mathrm{Ad}(a)Z(h,\ a),$$

où

$$V(h,a) := \sum_{i=l+1}^{n} \sum_{j=1}^{r} \nu_i(h)\varphi_{i,\ j}(a) V_j \in \mathfrak{m}_{\mathbb{C}}^\perp \cap \mathfrak{h}_{w\mathbb{C}},$$
$$Y(h) := \sum_{i=1}^{l} \nu_i(h) X_i \in \mathfrak{a}_{\mathbb{C}},$$
$$Z(h,a) \in \mathfrak{h}_{\mathbb{C}}.$$

Mais comme $\mathrm{Ad}((hw)^{-1})X \in \mathfrak{g}$, on a, d'après le lemme 2 (ii):

$$\begin{aligned} V(h,a) &:= \sum_{i=l+1}^{n} \sum_{j=1}^{r} \nu_i(h)\varphi_{i,\ j}(a) V_j \in \mathfrak{m}^\perp \cap \mathfrak{h}_w, \\ Y(h) &:= \sum_{i=1}^{l} \nu_i(h) X_i \in \mathfrak{a}, \\ Z(h,a) &\in \mathfrak{h}. \end{aligned} \tag{3.1}$$

Pour tout $m \in H \cap M$, on a alors:

$$\mathrm{Ad}((hmw)^{-1})X = V(hm,a) + Y(hm) + \mathrm{Ad}(a)Z(hm,a). \tag{3.2}$$

Mais $\mathrm{Ad}((hmw)^{-1})X = \mathrm{Ad}(w^{-1}m^{-1}w)(V(h,a) + Y(h) + \mathrm{Ad}(a)Z(h,a))$. Or w normalise $H \cap M$ et $w^{-1}mw$ commute à a (cf. lemme 1 (ii)). Donc:

$$\begin{aligned} &\mathrm{Ad}(w^{-1}m^{-1}w)V(h,a) \in \mathrm{Ad}(w^{-1}m^{-1}w)(\mathfrak{m}^{\perp} \cap \mathfrak{h}_w) = \mathfrak{m}^{\perp} \cap \mathfrak{h}_w \\ &\mathrm{Ad}(w^{-1}m^{-1}w)Y(h) = Y(h) \in \mathfrak{a} \\ &\mathrm{Ad}(w^{-1}m^{-1}w)\,\mathrm{Ad}(a)Z(h,a) = \mathrm{Ad}(a)(\mathrm{Ad}(w^{-1}m^{-1}w)Z(h,a)) \in \mathrm{Ad}(a)(\mathfrak{h}). \end{aligned} \tag{3.3}$$

Il découle de (3.1), (3.2) et (3.3) et du lemme 2 (ii) que:

$$\begin{aligned} &\mathrm{Ad}(hmw)V(hm,a) = \mathrm{Ad}(hw)V(h,a) \\ &Y(hm) = Y(h) \\ &Z(hm,a) = \mathrm{Ad}(w^{-1}m^{-1}w)Z(h,a). \end{aligned} \tag{3.4}$$

Comme $Z(h,a) \in \mathfrak{h}$ et Φ^w est invariante à droite par H on a:

$$L_{\mathrm{Ad}(hwa)Z(h,\ a)}\Phi^w(hwaH) = 0,$$

et par conséquent on obtient:

$$L_X\Phi^w(hwaH) = L_{\mathrm{Ad}(hw)V(h,a)}\Phi^w(hwaH) + \psi(h)L_{Y(h,a)}\varphi(a). \tag{3.5}$$

Soit (ϕ_k) une base de $\mathcal{R}_z$, alors l'expression de $V(h,a)$ dans (3.1) devient:

$$V(h,a) = \sum_{i=1}^{r}\sum_{k\in\mathcal{I}} \psi_{i,\ k}(h)\phi_k(a)V_i \tag{3.6}$$

où les $\psi_{i,\ k}$ sont des éléments de $\mathcal{E}(H)$ et $\mathcal{I}$ est un ensemble fini. Or pour tout $i = 1, \ldots,\ r$, $\mathrm{Ad}(hw)V_i$ est élément de $\mathfrak{h}$. Ecrivant $\mathrm{Ad}(hw)V_i$ dans la base (Z_i), on déduit de (3.6) qu'il existe des fonctions, $\tilde{\psi}_{u,\ k}$, éléments de $\mathcal{E}(H)$ telles que:

$$\mathrm{Ad}(hw)V(h,a) = \sum_{u=1}^{\dim\mathfrak{h}}\sum_{k\in\mathcal{I}} \tilde{\psi}_{u,\ k}(h)\phi_k(a)Z_u. \tag{3.7}$$

Comme (Z_i) est une base de $\mathfrak{h}$, il résulte de (3.4) et (3.7) que pour tout $i = 1, \ldots,\ \dim\mathfrak{h}$, et pour tout $m \in H \cap M$ et $a \in A^{reg}$ on a :

$$\sum_{k\in\mathcal{I}} \tilde{\psi}_{i,\ k}(hm)\phi_k(a) = \sum_{k\in\mathcal{I}} \tilde{\psi}_{i,\ k}(h)\phi_k(a).$$

Mais (ϕ_k) est une base de $\mathcal{R}_z$. On en déduit que les fonctions $\tilde{\psi}_{i,\ l}$ sont invariantes à droite par $H \cap M$. De même, comme (Y_i) est une base de $\mathfrak{a}$, il découle de (3.1) et (3.4) que les fonctions ν_i, $i = 1,\ \ldots,\ l$, sont invariantes à droite par $H \cap M$. Donc ceci joint à (3.7) montre que (3.5) peut s'écrire sous la forme voulue:

$$L_X\Phi^w(hwaH) = \sum_{u=1}^{p} \Phi^w(\psi_u(L_{Z'_u}\psi), \varphi_u(L_{Y'_u}\varphi))(hwaH)$$

avec $p \in \mathbb{N}^*$, $\psi_u \in \mathcal{E}(H/H \cap M)$, $\varphi_u \in \mathcal{R}_z$, $Z'_u \in \mathfrak{h}$ et $Y'_u \in \mathfrak{a}$. La proposition en résulte. ■

On note $\bar{N} := \theta(N)$.

Lemme 4. *On rappelle que $z \in W$, $X_0 \in zC_P$ et $a_t := \exp(tX_0)$. Soit $u \in N_K(\mathfrak{a})$.*
Si g est un élément de G tel que $g = z\bar{n}uman$, avec $\bar{n} \in \theta(N)$, $u \in N_K(\mathfrak{a})$, $m \in M$, $a \in A$ et $n \in N$, il existe $t_0 \geq 0$ tel que pour tout $t \geq t_0$, $a_t g \in HzuP$.

Démonstration. On pose $X_0' := z^{-1}X_0 \in C_P$ et $a_t' := \exp(tX_0')$. Si g est comme dans l'énoncé, on a: $a_t g = za_t'\bar{n}a_{-t}'u(u^{-1}a_t'u)man$. Comme $u^{-1}a_t'u$ est élément de A on a: $a_t g \in za_t'\bar{n}a_{-t}'uP$. Puisque $X_0 \in C_P$, $a_t'\bar{n}a_{-t}'$ tend vers e lorsque t tend vers $+\infty$. Donc on a:

$$\lim_{t\to+\infty} za_t'\bar{n}a_{-t}'u = zu. \tag{3.8}$$

Mais $HzuP$ est un ouvert de G/P contenant zuP, donc il existe $t_0 \geq 0$ tel que pour tout $t \geq t_0$, $za_t'\bar{n}a_{-t}' \in HzuP$, donc $a_t g \in HzuP$. ∎

Le fait suivant est immédiat: *Si $u \in N_K(\mathfrak{a})$ alors pour tout $i \in \{1, \ldots, l\}$ on a:*

$$u\mu_i(z^{-1}X_0) \leq \mu_i(z^{-1}X_0). \tag{3.9}$$

Si de plus $u \notin M$, il existe $p \in \{1, \ldots, l\}$ tel que:

$$u\mu_p(z^{-1}X_0) < \mu_p(z^{-1}X_0).$$

Lemme 5. *Pour tout $i \in \{1, \ldots, l\}$, il existe $C_i > 0$ tel que:*

$$\forall g \in G,\ \forall t \geq 0, |a_t^{-z\mu_i}\varepsilon_i(a_t g)| \leq C_i \parallel \pi_i(g)v_i \parallel$$

Démonstration. Pour tout $i \in \{1, \ldots, l\}$, u_i s'écrit $\sum_{\alpha\in J_i} v_\alpha$ où J_i est une famille finie d'éléments de $\mathfrak{a}^*$ et v_α sont des vecteurs non nuls de poids α. En utilisant la définition de ε_i et du produit scalaire sur V_i (voir §2.2) on a

$$a_t^{-z\mu_i}\varepsilon_i(a_t g) = a_t^{-z\mu_i}(\pi_i(a_t g)v_i, u_i) = a_t^{-z\mu_i}\sum_{\alpha\in J_i} a_t^\alpha(\pi_i(g)v_i, v_\alpha),$$

d'où on en déduit:

$$\mid a_t^{-z\mu_i}\varepsilon_i(a_t g) \mid \leq \sum_{\alpha\in J_i} a_t^{\alpha-z\mu_i} \parallel \pi_i(g)v_i \parallel\parallel v_\alpha \parallel \tag{3.10}$$

Comme $z^{-1}X_0 \in C_P$ et tout poids $z^{-1}\alpha$ de π_i est de la forme $z^{-1}\alpha = \mu_i - \sum_{\beta\in\Delta^+} n_\beta\beta$ où $n_\beta \in \mathbb{N}$, on a $a_t^{\alpha-z\mu_i} \leq 1$. Cela et (3.9) donnent:

$$\mid a_t^{-z\mu_i}\varepsilon_i(a_t g) \mid \leq (\sum_{\alpha\in J_i} \parallel v_\alpha \parallel) \parallel \pi_i(g)v_i \parallel \tag{3.11}$$

On pose $C_i = \sum_{\alpha\in J_i} \parallel v_\alpha \parallel$ et le lemme en résulte. ∎

Lemme 6. *On conserve les hypothèses du théorème* 1.
(i) *Pour tout* $g \in G$ *on a:*

$$\lim_{t\to+\infty} a_t^{-z(\lambda-\rho)}(\pi'_\lambda(a_{-t})\xi_\lambda^x)(g) = \begin{cases} \eta_{\lambda,z}(g) & si \;\; xz^{-1} \in W_H, \\ 0 & sinon. \end{cases}$$

(ii) *Si* B *est un sous-ensemble compact de* G*, il existe une constante* C_B*, strictement positive, tel que:*

$$\forall b \in B,\; \forall t > 0, \mid a_t^{-z(\lambda-\rho)}(\pi'_\lambda(a_{-t})\xi_\lambda^x)(b) \mid \leq C_B.$$

Démonstration. (i) On a: $G = \bigcup_{w\in N_K(\mathfrak{a})} NwP$. En translatant à gauche par zw_0 et en utilisant $w_0Nw_0^{-1} = \theta(N)$, on en déduit que: $G = \bigcup_{u\in N_K(\mathfrak{a})} z\theta(N)uP$. Donc pour $g \in G$, il existe $\bar{n} \in \theta(N)$, $m \in M$, $a \in A$, $n \in N$ et $u \in N_K(\mathfrak{a})$ tels que $g = z\bar{n}uman$. On note $X'_0 := z^{-1}X \in C_P$ et $a'_t := \exp tX'_0$ comme dans la démonstration du lemme 3. Alors notant $g'_t := za'_t\bar{n}a'_{-t}u$, on a:

$$a_tg = g'_t(u^{-1}a'_tu)man$$

et, pour $i = 1, \ldots, l$, on voit, grâce aux propriétés de ε_i, que:

$$\varepsilon_i(a_tg) = a^{\mu_i}a_t^{zu\mu_i}\varepsilon(g'_t).$$

Mais d'après (3.8), g'_t tend vers zu quand t tend vers $+\infty$. Comme $\varepsilon_i(zu) \neq 0$ (cf. lemme 2 (iii), il découle des propriétés des ε_i rappelées au début de §2 :

$$\varepsilon_i(a_tg) \sim a^{\mu_i}a_t^{zu\mu_i}\varepsilon_i(zu) \text{ quand } t \to +\infty. \tag{3.12}$$

En utilisant la définition de ξ_λ^x on a:

$$a_t^{-z(\lambda-\rho)}\pi'_\lambda(a_{-t})\xi_\lambda^x(g) = \prod_{i=1}^{l} \mid a_t^{-z\mu_i}\varepsilon_i(a_tg) \mid^{\lambda_i} 1_{HxP}(a_tg) \tag{3.13}$$

Comme pour t assez grand, $a_tg \in HzuP$ (voir lemme 3), ceci donne:

$$si \;\; HzuP \neq HxP,\; \lim_{t\to+\infty} a_t^{-z(\lambda-\rho)}\pi'_\lambda(a_{-t})\xi_\lambda^x(g) = 0. \tag{3.14}$$

On rappelle que d'après (3.9) on a, pour tout $i \in \{1, \ldots, l\}$ et $u \in N_K(\mathfrak{a})$:

$$z\mu_i(X_0) - zu\mu_i(X_0) \geq 0,$$

et si $u \notin M$, il existe p tel que:

$$z\mu_p(X_0) - zu\mu_p(X_0) > 0.$$

Mais si $xz^{-1} \notin W_H$ et $HzuP = HxP$ on a $u \notin M$. D'où on déduit de (3.10) et (3.11) que dans ce cas:

$$\lim_{t\to+\infty} a_t^{-z(\lambda-\rho)}\pi'_\lambda(a_{-t})\xi_\lambda^x(g) = 0.$$

Ceci joint à (3.12) montre que:

$$\lim_{t\to+\infty} a_t^{-z(\lambda-\rho)}\pi'_\lambda(a_{-t})\xi_\lambda^x(g)=0 \ si\ xz^{-1}\notin W_H.$$

On suppose maintenant que $xz^{-1}\in W_H$. Alors si $u\notin M$, il découle de (3.9), (3.10) et (3.11):

$$\lim_{t\to+\infty} a_t^{-z(\lambda-\rho)}\pi'_\lambda(a_{-t})\xi_\lambda^x(g)=0.$$

Mais d'après la définition de $\eta_{\lambda,\ z}$ (cf. début de 3.3), on voit facilement que:

$$\eta_{\lambda,\ z}(z\bar{n}uman)=\prod_{i=1}^{l} a^{\lambda_i\mu_i}\eta_{i,\ e}(u).$$

Or $\eta_{i,\ e}(u)=(\pi_i(u)v_i,v_i)$ et $u\notin M$, d'où il existe, d'après (3.9), $p\in\{1,\ldots,p\}$ tel que $u\mu_p<\mu_p$, auquel cas $\eta_{p,e}(u)=0$ (voir notre choix du produit scalaire §2). Donc $\eta_{\lambda,\ z}(g)=0$ comme désiré. Il reste à étudier le cas où $u\in M$. Dans ce cas, d'après (3.10), (3.11) et le lemme 1 (iii), on a:

$$\lim_{t\to+\infty} a_t^{-z(\lambda-\rho)}\pi'_\lambda(a_{-t})\xi_\lambda^x(g)=\prod_{i=1}^{l} a^{\lambda_i\mu_i}.$$

Comme v_i est M-invariant, il est clair que si $u\in M$ on a $\eta_{i,\ z}(z\bar{n}uman)=a^{\mu_i}$ et $\eta_{\lambda,\ z}(g)$ est bien égal au second membre de l'égalité ci-dessus. Ceci achève la démonstration de (i).

(ii) On a $a_t^{-z(\lambda-\rho)}\pi'_\lambda(a_{-t})\xi_\lambda^x(b)=\prod_{i=1}^{l}\mid a_t^{-z\mu_i}\varepsilon_i(a_tb)\mid^{\lambda_i} 1_{HxP}(a_tb)$, d'où on déduit du lemme 4 qu'il existe $C>0$ tel que pour tout $t>0$ et pour tout $b\in B$ on a:

$$\mid a_t^{-z(\lambda-\rho)}\pi'_\lambda(a_{-t})\xi_\lambda^x(b)\mid\leq C\prod_{i=1}^{i}\parallel \pi_i(b)v_i\parallel^{Re(\lambda_i)},$$

Or B est compact, d'où il résulte de la continuité des π_i qu'il existe $C_B>0$ tel que pour tout $t>0$ et pour tout $b\in B$:

$$\mid a_t^{-z(\lambda-\rho)}\pi'_\lambda(a_{-t})\xi_\lambda^x(b)\mid\leq C_B.$$

■

Corollaire du lemme 5. (i) $\exists C_{\varphi,\ \psi}>0$, $\forall k\in K$, $\forall h\in \text{supp }\psi$, $\forall a\in\text{supp }\varphi$, $\forall t>0$,

$$\mid a_t^{-z(\lambda-\rho)}(\pi'_\lambda(hwaa_{-t})\xi_\lambda^x)(k)\mid\leq C_{\varphi,\ \psi}.$$

(ii) $\forall k\in K$, $\forall h\in\text{supp }\psi$, $\forall a\in\text{supp }\varphi$ *on a:*

$$\lim_{t\to+\infty} a_t^{-z(\lambda-\rho)}(\pi'_\lambda(hwaa_{-t})\xi_\lambda^x)(k)=\begin{cases}0 & si\ xz^{-1}\notin W_H,\\ (\pi'_\lambda(hwa)\eta_{\lambda,\ z})(k) & si\ xz^{-1}\in W_H.\end{cases}$$

Démonstration. La démonstration est analogue à celle du lemme 7 de [7]. ■

Lemme 7. (i) *Si μ est un élément de $\mathcal{R}_z$, la famille de fonctions $a \mapsto \mu(aa_{-t})$ converge simplement sur $\mathcal{C}$ quand t tend vers $+\infty$. De plus, il existe $C_{\mu,\ \varphi} > 0$ tel que:*

$$\forall a \in \text{supp } \varphi,\ \forall t > 0,\ \mid \mu(aa_{-t}) \mid \leq C_{\mu,\ \varphi}.$$

(ii) *Pour tout $a \in \mathcal{C}$, avec les notations du §2.4, on a:*

$$\lim_{t\to+\infty} a_t^{-2z\rho} D_w(aa_{-t}) = a^{-2z\rho}.$$

(iii) $\exists C_{w,\ \varphi} > 0$ *tel que:*

$$\forall a \in \text{supp } \varphi,\ \forall t > 0,\ \mid a_t^{-2z\rho} D_w(aa_{-t}) \mid \leq C_{w,\ \varphi}.$$

Démonstration. La démonstration est analogue à celle du lemme 8 de [7]. ■

On procède de la même façon que la fin de démonstration du théorème 1 de [7], p. 326, en utilisant les lemmes 5 et 6 au lieu des lemmes 7 et 8 de [7], pour terminer la démonstration du théorème 1. ■

4. Intégrales d'entrelacement

On rappelle que P est un sous-groupe parabolique $\sigma\theta$-stable minimal et $P = MAN$ est sa σ-décomposition de Langlands.
Si $w \in N_K(\mathfrak{a})$ on normalise la mesure de Haar de $\bar{N} \cap w^{-1}Nw$ comme dans [18], §2. Cette mesure sera notée dv. On note $S(w) := \Delta^+ \cap (-w^{-1}\Delta^+)$. On sait qu'il existe une constante c telle que si on note :

$$D(w) := \{\lambda \in \mathfrak{a}_{\mathbb{C}}^* : \forall\alpha \in S(w),\ \Re e(\lambda,\ \alpha) > c\},$$

pour tout $\lambda \in D(w)$, $x \in G$, et $f \in I_\lambda$ l'intégrale $\int_{\bar{N}\cap w^{-1}Nw} f(xwv)dv$ converge absolument. La relation

$$A(w,\ \lambda)(f)(x) = \int_{\bar{N}\cap w^{-1}Nw} f(xwv)dv$$

définit un élément $A(w,\ \lambda)(f)$ de $I_{w\lambda}$. De plus, l'opérateur $A(w,\ \lambda)$ ainsi défini, entrelace les représentations π_λ et $\pi_{w\lambda}$ de G, d'où le nom d'intégrale d'entrelacement qui lui est donné (cf. [18], formules 1.7, 1.9 et [27], lemme 10.1.2), voir aussi [6], proposition 1. On désigne par $A'(w,\ \lambda)$ le transposé de $A(w,\ \lambda)$.

Remarque 3. *Comme les éléments de I_λ sont invariants à droite par M, les intégrales d'entrelacement ne dépendent que de la classe de w dans W.*

On rappelle que les intégrales d'entrelacement vérifient des propriétés de dualité et l'on a d'après (cf. [18], prop.7.8(iii)) et la continuité des A:

$$A'(w,\ \lambda) \mid_{I_{-w\lambda}} = A(w^{-1},\ -w\lambda). \tag{4.1}$$

Rappelons que l'on a un isomorphisme $T \to \tilde{T}$ (resp. $T \to T_{-\lambda}$) de $(I_\lambda^P)'$ sur $I' = \mathcal{D}'(K/K \cap M)$ (voir §3).

Si $w \in W$ on note $\delta_w \in \mathcal{D}'(K/K\cap M)$ la distribution de Dirac en $w(K\cap M)$. On notera δ_w^λ au lieu de $(\delta_w)_{-\lambda}$.
Si $w \in W$ et $\lambda \in \mathfrak{a}'_{\mathbb{C}}$ tel que $\Re e(\lambda-\rho)$ est strictement Δ^+-dominant on a:

$$A'(w_0,\ \lambda)\delta_{zw_0}^{w_0\lambda} = \eta_{\lambda,\ z}. \tag{4.2}$$

La démonstration est identique à celle de ([7], lemme 11).
En utilisant la propriété d'entrelacement de $A'(w_0,\ \lambda)$ et la définition de $u_{\lambda,\ z}^{w,\ x}$ (cf. théorème 1) on obtient:

$$u_{\lambda,\ z}^{w,\ x} = A'(w_0,\ \lambda)v_{\lambda,\ z}^{w,x} \tag{4.3}$$

où $v_{\lambda,\ z}^{w,x} = \int_{H/H\cap M}\int_{\mathcal{C}} \psi(\dot h)\varphi(a)a^{-z(\lambda+\rho)}\pi'_{w_0\lambda}(hw)\delta_{zw_0}^{w_0\lambda}da d\dot h$ si $zx^{-1}\in W_H$ et 0 sinon.
On rappelle qu'il existe une constante c_0 tel que pour tout $f \in L^1(K/K\cap M)$ on a:

$$\int_{K/K\cap M} f(\dot k)d\dot k = c_0 \sum_{y\in W_H\backslash W}\int_{H/H\cap M} f(k(hy))a(hy)^{-2\rho}d\dot h, \tag{4.4}$$

où $k(h)$ (resp. $a(h)$) désigne la projection sur K (resp. A) par rapport à la décomposition $G = K\exp(\mathfrak{m}\cap\mathfrak{p})AN$ (cf. [21], lemme 1.3). Alors $v_{\lambda,\ z}^{w,\ x}$ est un élément de $I_{-w_0\lambda}$ et si $zx^{-1}\in W_H$ on a:

$$\begin{aligned} &v_{\lambda,\ z}^{w,\ x}(hwzw_0) = \frac{1}{c_0}\Big(\int_{\mathcal{C}}\varphi(a)a^{-z(\lambda+\rho)}da\Big)\psi(h) \text{ pour tout } h\in H,\\ &v_{\lambda,\ z}^{w,x}(g) = 0 \ si\ g \notin Hwzw_0P \end{aligned} \tag{4.5}$$

(la démonstration est identique à celle de [7], lemme 12).
On se fixe $\mathcal{W}$ (cf. §2) et on note $\mathcal{V} := \mathbb{C}^{\mathcal{W}}$. Pour λ tel que $\Re e(\lambda-\rho)$ est strictement Δ^+-dominant, on note:

$$\begin{aligned} j(\lambda)\ :\ &\mathcal{V}\to I'_\lambda\\ &(\eta_w)_{w\in\mathcal{W}} \mapsto \sum_{w\in\mathcal{W}}\eta_w\xi_\lambda^w. \end{aligned}$$

Alors la fonction $\lambda\mapsto j(\lambda)\in \mathrm{Hom}(\mathcal{V},\mathcal{D}'(K/K\cap M))$, initialement définie pour λ tel que $\Re e(\lambda-\rho)$ est strictement Δ^+-dominant, se prolonge en une fonction méromorphe sur $\mathfrak{a}^*_{\mathbb{C}}$ (cf. [1], th 5.10). On rappelle que pour tout w élément de W, il existe un endomorphisme de $\mathcal{V}$, $B(w^{-1},\ \lambda)$, méromorphe en λ tel que l'on ait l'identité de fonctions méromorphes sur $\mathfrak{a}^*_{\mathbb{C}}$:

$$A'(w,\ \lambda)j(w\lambda) = j(\lambda)B(w^{-1},\ w\lambda) \tag{4.6}$$

(cf. [1], proposition 6.1). Pour tout $x\in W$, on désigne par $\bar x$ son représentant dans $\mathcal{W}$. En écrivant $B(w^{-1},\ w\lambda)$ dans la base canonique de $\mathbb{C}^{\mathcal{W}}$, on a alors:

$$\forall x\in W,\ A'(w,\ \lambda)\xi_{w\lambda}^x = \sum_{y\in\mathcal{W}} B_{y,\ \bar x}(w^{-1},\ w\lambda)\xi_\lambda^y. \tag{4.7}$$

On se place en un point λ où toutes les fonctions méromorphes qui interviendront sont définies. Alors pour tout $u,\ v\in W$ tels que $l(uv) = l(u)+l(v)$, où $l(u)$ est la longueur de u relativement à Δ^+, on a:

$$A'(v,\lambda)A'(u,\ v\lambda) = A'(uv,\ \lambda) \tag{4.8}$$

ceci par tranposition des propriétés des intégrales d'entrelacement (cf. [18], prop. 7.8). Pour un tel λ et pour tout w élément de W on a aussi:

$$A(w^{-1},\ w\lambda)A(w,\ \lambda) = \eta_w(\lambda)Id \tag{4.9}$$

où $\eta_w(.)$ est une fonction méromorphe à valeurs dans $\mathbb{C}$ (cf. [18], proposition 7.3). En utilisant (4.6) et (4.8), on en déduit que:
Pour tout $u,\ v \in W$ tels que $l(uv)= l(u)+l(v)$ on a l'égalité de fonctions méromorphes en λ:

$$B(u, v\lambda)B(v,\ \lambda) = B(uv, \lambda). \tag{4.10}$$

De même (4.6) et (4.9) donnent:
Pour un tel λ et pour tout w élément de W on a:

$$B(w^{-1},\ w\lambda)B(w,\ \lambda) = \eta_w(\lambda)Id. \tag{4.11}$$

D'après [6], prop. 7:

$$\begin{aligned}&B\ est\ holomorphe\ en\ dehors\ d'une\ famille\\ &localement\ finie\ d'hyperplans.\end{aligned} \tag{4.12}$$

5. Etude des restrictions des distributions $\Theta_\lambda^{x,\ y}$ à $HA^{reg}wH$

On note $\mathfrak{g}^d = (\mathfrak{k} \cap \mathfrak{h}) \oplus i(\mathfrak{k} \cap \mathfrak{q}) \oplus i(\mathfrak{p} \cap \mathfrak{h}) \oplus (\mathfrak{p} \cap \mathfrak{q})$ le dual riemannien de $\mathfrak{g}$. On a une décomposition de Cartan $\mathfrak{g}^d = \mathfrak{k}^d \oplus \mathfrak{p}^d$ où $\mathfrak{k}^d = (\mathfrak{k} \cap \mathfrak{h}) \oplus i(\mathfrak{p} \cap \mathfrak{h})$ et $\mathfrak{p}^d = i(\mathfrak{k} \cap \mathfrak{q}) \oplus (\mathfrak{p} \cap \mathfrak{q})$.
On note G^d (resp. K^d) le sous-groupe analytique de $G_{\mathbb{C}}$ d'algèbre de Lie $\mathfrak{g}^d$ (resp. $\mathfrak{k}^d$). Alors $\mathfrak{a}$ est un sous-espace abélien maximal dans $\mathfrak{p}^d$. Comme $\mathfrak{g}^d_{\mathbb{C}} = \mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$, le système de racines de $\mathfrak{a}$ dans $\mathfrak{g}^d$ est égal à $\Delta := \Delta(\mathfrak{g},\ \mathfrak{a})$ et son groupe de Weyl est égal à W.
Le lemme suivant est standard (cf. [28], ch. 1, lemme 6.A).

Lemme 8. *Si E est un espace vectoriel complexe de dimension finie et $\{H_i\}_{i\in I}$ est une famille localement finie d'hyperplans alors $E \setminus (\bigcup_{i\in I} H_i)$ est un ouvert dense et connexe par arc dans E.* ∎

On se fixe des éléments x, y, w et z de W. On note aussi, w, un représentant de w dans $N_K(\mathfrak{a})$ et $\mathcal{C}_z = \exp(-zC_P)$. On note L le semi-groupe additif engendré par Σ et $L^+ := L \setminus \{0\}$. On pose

$$^*\mathfrak{a}_{\mathbb{C}} := \mathfrak{a}^*_{\mathbb{C}} \setminus (\bigcup_{k\in W,\ \mu\in L^+} k\sigma_\mu \cup \bigcup_{s,\ t\in W,\ \nu\in L^+} \tau_\nu(s,t)),$$

où

$$\sigma_\mu := \{\lambda \in \mathfrak{a}^*_{\mathbb{C}} : (\lambda, \mu) = \frac{1}{2}(\mu, \mu)\} \text{ et } \tau_\nu(s,t) := \{\lambda \in \mathfrak{a}^*_{\mathbb{C}} \mid\ s\lambda - t\lambda = \nu\}.$$

On désigne par $(\mathfrak{a}^*_{\mathbb{C}})^{reg}$, l'ensemble des éléments réguliers de $\mathfrak{a}^*_{\mathbb{C}}$, c'est à dire $(\mathfrak{a}^*_{\mathbb{C}})^{reg} := \{\lambda \in \mathfrak{a}^*_{\mathbb{C}} : (\lambda, \alpha) \neq 0\ \forall\alpha \in \Delta\}$. Soit, $\mathcal{H}$, une famille localement finie d'hyperplans en dehors de laquelle ξ_λ^x et $\xi_{-\lambda}^y$ sont holomorphes (cf. [21], th. 5.1). On note ${}^*\mathfrak{a}_\mathbb{C}^{reg}(x,\ y)$ l'intersection du complémentaire de $\mathcal{H}$ avec ${}^*\mathfrak{a}_\mathbb{C}(x,y)\cap(\mathfrak{a}_\mathbb{C}^*)^{reg}$. Comme la famille $\{k\sigma_\mu,\ \tau(s,t)\}_{k,\ s,\ t\in W}\}$ est une famille localement finie d'hyperplans (cf. [11], p. 150), ${}^*\mathfrak{a}_\mathbb{C}^{reg}(x,y)$ est le complémentaire dans $\mathfrak{a}_\mathbb{C}^*$ d'une famille localement finie d'hyperplans. Donc d'après le lemme précédent ${}^*\mathfrak{a}_\mathbb{C}^{reg}(x,y)$ est un ouvert dense et connexe. On note $\mathbb{D}(G/H)$ l'algèbre des opérateurs différentiels G-invariants sur G/H. Si T est une distribution H-invariante de $\mathcal{D}'(G/H)$ telle que pour tout $D\in\mathbb{D}(G/H)$ on ait:

$$DT=\gamma(D)(-\lambda)T$$

où $\lambda\in{}^*\mathfrak{a}_\mathbb{C}^{reg}(x,\ y)$ et γ est l'homomorphisme de Harish-Chandra de G/H relatif à $\mathfrak{a}$ (qui est maximal abélien dans $\mathfrak{p}^d$ puisque G/H est déployé), alors T est une fonction analytique sur l'ensemble des éléments réguliers de G/H (cf. [12], th. 4.2 ou [24], th. 10.5). On a $\mathbb{D}(G/H)\simeq U(\mathfrak{g})^\mathfrak{h}/(U(\mathfrak{g})\mathfrak{h}\cap U(\mathfrak{g})^\mathfrak{h})$ (cf. [1], lemme 2.1). Comme $\mathfrak{g}_\mathbb{C}$ (resp. $\mathfrak{h}_\mathbb{C}$) est le complexifié de $\mathfrak{g}^d$ (resp. $\mathfrak{k}^d$) et $\mathfrak{g}$ (resp. $\mathfrak{h}$), on a aussi $\mathbb{D}(G^d/K^d)\simeq U(\mathfrak{g})^\mathfrak{h}/(U(\mathfrak{g})\mathfrak{h}\cap U(\mathfrak{g})^\mathfrak{h})$. Donc $\mathbb{D}(G^d/K^d)\simeq\mathbb{D}(G/H)$. Pour tout $D\in\mathbb{D}(G/H)$, on notera D^d, l'élément de $\mathbb{D}(G^d/K^d)$ qui lui correspond dans cet isomorphisme et $D_\mathbb{C}$ (resp. $D_\mathbb{C}^d$) l'opérateur différentiel analytique complexe sur $G_\mathbb{C}/H_\mathbb{C}$ défini à partir de D (resp. D^d). L'opérateur $D_\mathbb{C}$ est construit comme suit: on prend un élément $\underline{D}\in U(\mathfrak{g})^\mathfrak{h}$ tel que $D=R_{\underline{D}}$. Alors $R_{\underline{D}}$ agit comme un opérateur différentiel analytique complexe sur le faisceau des fonctions holomorphes sur $G_\mathbb{C}/H_\mathbb{C}$ et on prend $D_\mathbb{C}$ égal à cet opérateur (il ne dépend pas du choix de $\underline{D}$). On fait de même pour D^d. Clairement on a:

$$D_\mathbb{C}=D_\mathbb{C}^d.$$

Le fait que $\mathfrak{a}$ est un sous-espace abélien maximal dans $\mathfrak{q}$ et dans $\mathfrak{p}^d$ montre que pour tout $D\in\mathbb{D}(G/H)$ on a :

$$\gamma(D)=\gamma^d(D^d)$$

où γ^d est l'homomorphisme de Harish-Chandra de G^d/K^d relatif à $\mathfrak{a}$ (cela peut être pris comme définition de γ).
On désigne par $\mathcal{A}_\mathbb{C}$ (resp. $\mathcal{A}$, $\mathcal{A}^d$) le sous -ensemble de Cartan de $G_\mathbb{C}/H_\mathbb{C}$ (resp. G/H, G^d/K^d) correspondant à $\mathfrak{a}_\mathbb{C}$ (resp. $\mathfrak{a}$) (cf. début de §2.3). On note:

$$\begin{aligned}
{}'\mathcal{A}_\mathbb{C} &:= \{gH_\mathbb{C}\in\mathcal{A}_\mathbb{C}:\det(1-\mathrm{Ad}(g\sigma(g)^{-1}))|_{[\mathfrak{a}_\mathbb{C},\ \mathfrak{g}_\mathbb{C}]}\neq 0\},\\
{}'\mathcal{A} &:= \{gH\in\mathcal{A}:\det(1-\mathrm{Ad}(g\sigma(g)^{-1}))|_{[\mathfrak{a},\mathfrak{g}]}\neq 0,\\
{}'\mathcal{A}^d &:= \{gK^d\in\mathcal{A}^d:\det(1-\mathrm{Ad}(g\sigma(g)^{-1}))|_{[\mathfrak{a},\mathfrak{g}^d]}\neq 0\}.
\end{aligned}$$

On note $\mathcal{M}:=\{g\sigma(g^{-1}):g\in G_\mathbb{C}\}$. On sait d'après [22], lemme 1, que $\mathcal{M}$ est une sous-variété fermée de $G_\mathbb{C}$. En outre, l'application φ, définie sur $G_\mathbb{C}/H_\mathbb{C}$ à valeurs dans $\mathcal{M}$ par $\varphi(gH_\mathbb{C})=g\sigma(g^{-1})$, est un difféomorphisme (cf. [22], §1). Comme $\varphi(\mathcal{A}_\mathbb{C})=\exp\mathfrak{a}_\mathbb{C}$ (cf. [22], lemme 8), l'espace tangent à $\mathcal{A}_\mathbb{C}$ s'identifie naturellement à $\mathfrak{a}_\mathbb{C}$, en associant à tout $x\in\mathcal{A}_\mathbb{C}$ et $X\in\mathfrak{a}_\mathbb{C}$, le vecteur tangent à la courbe $t\mapsto\exp(tX)x$. Ainsi, tout $X\in\mathfrak{a}_\mathbb{C}$, définit un champ de vecteurs holomorphe sur $\mathcal{A}_\mathbb{C}$, et $U(\mathfrak{a})$ s'identifie à une algèbre d'opérateurs différentiels analytiques complexes sur $\mathcal{A}_\mathbb{C}$. Comme $wH_\mathbb{C}$ est un élément de $\mathcal{A}_\mathbb{C}$, il existe

$h \in H_{\mathbb{C}}$, $X, Y \in \mathfrak{a}$ tels que $w = \exp(Y + iX)h$. Mais $\varphi(wH_{\mathbb{C}}) = t_{w^{-1}}$ est élément de $\exp(i\mathfrak{a})$ (cf. lemme 1). D'autre part, $\varphi(wH_{\mathbb{C}}) = \exp(2Y + 2iX)$. Donc on a $\exp 2Y \in \exp i\mathfrak{a}$, soit encore $Y = 0$. Alors on a:

$$t_{w^{-1}} = \exp(2iX) et w = \exp(iX)h. \tag{5.1}$$

On sait d'après [12], p. 26 et 27, qu'il existe une application $\delta_{\mathbb{C}}$ de $\mathbb{D}(G/H)$ dans l'algèbre des opérateurs différentiels analytiques complexes sur $'\mathcal{A}_{\mathbb{C}}$ telle que, pour tout $D \in \mathbb{D}(G/H)$, l'opérateur différentiel $\delta_{\mathbb{C}}(D)$ est une composante radiale de $D_{\mathbb{C}}$ sur $'\mathcal{A}_{\mathbb{C}}$, et par restriction à $'\mathcal{A}$ (resp. $'\mathcal{A}^d$), l'opérateur $D_{\mathbb{C}}$ définit un opérateur analytique réel, $\delta(D)$ (resp. $\delta^d(D^d)$), qui est une composante radiale de D (resp. D^d) sur $'\mathcal{A}$ (resp. $'\mathcal{A}^d$). On écrit abusivement, $\delta(D) = \delta_{\mathbb{C}}(D)_{|'\mathcal{A}}$ et $\delta^d(D^d) = \delta_{\mathbb{C}}(D)_{|'\mathcal{A}^d}$. On garde les notations du §2.1, et on note $\mathfrak{a}_{\mathbb{C}}^{reg} := \{Z \in \mathfrak{a}_{\mathbb{C}} : \forall\alpha \in \Delta, \alpha(Z) \neq 0\}$. Comme l'application $X \mapsto \exp(X)H_{\mathbb{C}}$ définie sur $\mathfrak{a}_{\mathbb{C}}$ à valeurs dans $\mathcal{A}_{\mathbb{C}}$ est submersive et $\mathfrak{a}_{\mathbb{C}}^{reg}$ est un ouvert de $\mathfrak{a}_{\mathbb{C}}$, $\exp(\mathfrak{a}_{\mathbb{C}}^{reg})H_{\mathbb{C}}$ est un ouvert de $\mathcal{A}_{\mathbb{C}}$. Comme $\exp(\mathfrak{a}_{\mathbb{C}}^{reg})H_{\mathbb{C}}$ est inclus dans l'ouvert $'\mathcal{A}_{\mathbb{C}}$, $\exp(\mathfrak{a}_{\mathbb{C}}^{reg})H_{\mathbb{C}}$ est un ouvert de $'\mathcal{A}_{\mathbb{C}}$. Pour $\alpha \in \Delta$, on définit l'application g_α sur $\exp(\mathfrak{a}_{\mathbb{C}}^{reg})H_{\mathbb{C}}$ par:

$$g_\alpha(b) \quad = \quad (\varphi(b)^\alpha - 1)^{-1}.$$

En particulier, on a:

$$\forall a \in \mathcal{C}_z, g_\alpha(awH_{\mathbb{C}}) = (t_{w^{-1}}^\alpha a^{2\alpha} - 1)^{-1} \tag{5.2}$$

On note $\mathcal{R}^z$ l'anneau des fonctions holomorphes sur $\exp(\mathfrak{a}_{\mathbb{C}}^{reg})H_{\mathbb{C}}$ engendré par les g_α, $\alpha \in -z\Delta^+$. On va donner une expression de $\delta(D)_{|\mathcal{C}_z wH}$ en fonction de $\gamma(D)$ et des éléments de $U(\mathfrak{a})$.

Il découle du lemme 26 de [15], qu'il existe $u_i \in U(\mathfrak{a})$ de degré strictement inférieur à celui de D, $g_i \in \mathcal{R}$, $i = 1, \ldots, r$, tels que:

$$\forall D \in \mathbb{D}(G/H), \delta^d(D^d)_{|\mathcal{C}_z K^d} = e^{z\rho} \circ \gamma(D) \circ e^{-z\rho} + \sum_{1\leq i\leq r} e^{z\rho} \circ g_i u_i \circ e^{-z\rho} \tag{5.3}$$

(ici on a noté de même g_i la restriction de g_i à $\mathcal{C}_z K^d$). Si $u \in U(\mathfrak{a})$, $e^{z\rho} \circ u \circ e^{-z\rho}$ est encore élément de $U(\mathfrak{a})$. Comme les éléments de $\mathcal{R}$ sont holomorphes sur $\exp(\mathfrak{a}_{\mathbb{C}}^{reg})H_{\mathbb{C}}$, qui est un ouvert connexe de $'\mathcal{A}_{\mathbb{C}}$, et $\delta_{\mathbb{C}}(D)$ est analytique complexe sur $'\mathcal{A}_{\mathbb{C}}$, on déduit de (5.3) que:

$$\forall D \in \mathbb{D}(G/H), \delta_{\mathbb{C}}(D)_{|\exp(\mathfrak{a}_{\mathbb{C}}^{reg})H_{\mathbb{C}}} = e^{z\rho} \circ \gamma(D) \circ e^{-z\rho} + \sum_{1\leq i\leq r} g_i u_i', \tag{5.4}$$

où $u_i' = e^{z\rho} \circ u_i \circ e^{-z\rho}$. Comme $\mathcal{C}_z wH$ est un ouvert de $'\mathcal{A} \cap (\exp(\mathfrak{a}_{\mathbb{C}}^{reg})H_{\mathbb{C}})$, on déduit de (5.4) que:

$$\forall D \in \mathbb{D}(G/H), \delta(D)_{|\mathcal{C}_z wH} = e^{-\rho} \circ \gamma(D) \circ e^{\rho} + \sum_{1\leq i\leq r} \tilde{g}_i u_i', \tag{5.5}$$

où $\tilde{g}_i$ est la restriction de g_i à $\mathcal{C}_z wH$. En particulier, si on note ω le Casimir de $\mathfrak{g}$ (vu comme élément de $\mathbb{D}(G/H)$), on a d'après [11], prop. 4.2.1:

$$\delta(\omega)_{|\mathcal{C}_z wH} = e^{z\rho} \circ \gamma(\omega) \circ e^{-z\rho} + \sum_{\alpha\in -z\Delta^+} m_\alpha \tilde{g}_\alpha H_\alpha, \tag{5.6}$$

où H_α est l'élément de $\mathfrak{a}$ tel que pour tout $X \in \mathfrak{a}$, $(H_\alpha,\ X) = \alpha(X)$, et $m_\alpha = \dim \mathfrak{g}^\alpha$. On note

$$E(\mathcal{C}_z w, \lambda) := \{f \in \mathcal{E}(\mathcal{C}_z wH) : \delta(D)f = \gamma(D)(\lambda)f,\ \forall D \in \mathbb{D}(G/H)\}.$$

Comme dans [11], prop. 4.1.8, en utilisant (5.5) d'une part et (5.6) (pour l'ellipticité de $\delta(\omega)_{|\mathcal{C}_z wH}$) on voit que:

$$\dim E(\mathcal{C}_z w, \lambda) \leq |W|. \tag{5.7}$$

On note $\check{\mathfrak{a}_{\mathbb{C}}}(z) := \mathfrak{a}_{\mathbb{C}}^* \setminus \bigcup_{\mu \in L^+} -z\sigma_\mu$. On introduit des fonctions rationnelles a_μ, $\mu \in L$, sur $\mathfrak{a}_{\mathbb{C}}^*$ par la relation de récurrence: $a_0(\lambda) = 1$ et

$$\begin{aligned} &((\mu, \mu) + 2(z\mu, \lambda))a_\mu(\lambda) \\ = \ &-2 \sum_{\substack{\alpha \in -z\Delta^+ \\ k \geq 1, \mu + 2kz^{-1}\alpha \in L}} t_{w^{-1}}^{k\alpha} m_\alpha(\lambda + z\mu + 2k\alpha + z\rho, w\alpha) a_{\mu + 2kz^{-1}\alpha}(\lambda). \end{aligned} \tag{5.8}$$

Si $\mu = \sum_{i=1}^{l} n_i \alpha_i$ ($n_i \in \mathbb{N}$ et $\alpha_i \in \Sigma$), on pose $m(\mu) := \sum_{i=1}^{l} n_i$.

Proposition 3. *Pour $\lambda \in \check{\mathfrak{a}_{\mathbb{C}}}(z)$, $a \in \mathcal{C}_z$, on note formellement:*

$$\Phi(\mathcal{C}_z w, \lambda, awH) = a^{\lambda + z\rho}(1 + \sum_{\mu \in L^+} a_\mu(\lambda) a^{z\mu}).$$

(i) *Pour tout sous-ensemble compact de $\check{\mathfrak{a}_{\mathbb{C}}}(z)$, Λ, il existe $C > 0$ et $d \geq 0$ tels que:*

$$\forall \mu \in L^+, \forall \lambda \in \Lambda, |a_\mu(\lambda)| \leq C m(\mu)^d.$$

(ii) *la série $\Phi(\mathcal{C}_z w, \lambda, awH)$ est absolument convergente pour $\lambda \in \check{\mathfrak{a}_{\mathbb{C}}}(z)$ et $a \in \mathcal{C}_z$. De plus il existe $\varepsilon > 0$, $M > 0$ tels que:*

$$\forall Y \in -zC_P, \forall \alpha \in \Sigma, -z\alpha(Y) > \varepsilon \Rightarrow \sum_{\mu \in L^+} |a_\mu(\lambda)| e^{z\mu(Y)} < M.$$

(iii) *$\Phi(\mathcal{C}_z w, ., .)$ est une fonction C^∞ sur $\check{\mathfrak{a}_{\mathbb{C}}}(z) \times \mathcal{C}_z wH$ et pour tout $a \in \mathcal{C}_z$ (resp. $\lambda \in \check{\mathfrak{a}_{\mathbb{C}}}(z)$), $\Phi(\mathcal{C}_z w, \lambda,\ awH)$ est holomorphe en λ (resp. analytique en awH).*

(iv) *$\Phi(\mathcal{C}_z w, \lambda, \cdot)$ est une famille de distributions sur $\mathcal{C}_z wH$ holomorphe.*

(v) *Si $\lambda \in {}^*\mathfrak{a}_{\mathbb{C}}^{reg}$, $(\Phi(\mathcal{C}_z w, u\lambda, \cdot))_{u \in W}$ est une base de $E(\mathcal{C}_z w, \lambda)$.*

Démonstration.
(i) Comme pour tout $\alpha \in \Delta$, $|t_{w^{-1}}^\alpha| = 1$, la démonstration est la même que celle du corollaire 4.3.6 de [11].
Comme dans [11], prop. 4.3.7, (ii) et (iii) se déduisent de (i).
(iv) On sait que si Ω et M sont deux variétés C^∞, $C^\infty(\Omega \times M)$ et $C^\infty(\Omega,\ C^\infty(M))$ sont isomorphes. Si de plus Ω a une structure analytique complexe, en utilisant les équations de Cauchy-Riemann, le sous-espace de $C^\infty(\Omega \times M)$ formé des fonctions holomorphes en la premiére variable correspond, via l'isomophisme ci-dessus, au

sous-espace de $C^\infty(\Omega, C^\infty(M))$ formé des fonctions holomorphes sur Ω à valeurs dans $C^\infty(M)$. Ceci et (iii), montrent que lorsque $\Omega = \mathfrak{a}_{\mathbb{C}}\check{}(z)$ et $M = \mathcal{C}_z wH$, la famille des fonctions C^∞ sur $\mathcal{C}_z wH$, $\Phi(\mathcal{C}_z w, \lambda, \cdot)$, est holomorphe. Grâce au plongement continu de $C^\infty(\Omega, C^\infty(\mathcal{C}_z wH)$ dans $\mathcal{D}'(\mathcal{C}_z wH)$, $\Phi(\mathcal{C}_z w, \lambda, \cdot)$ est aussi une famille de distributions holomorphe.
(v) Avec le même argument que celui [11], prop. 4.3.7, on vérifie que pour $\lambda \in {}^*\mathfrak{a}_{\mathbb{C}}^{reg}$ et $u \in W$, $\Phi(\mathcal{C}_z w, u\lambda, \cdot)$ est élément de $E(\mathcal{C}_z w, \lambda)$. Montrons que la famille $\Phi(\mathcal{C}_z w, u\lambda, \cdot)$, $u \in W$, est libre. Soit $Y \in -zC_P$ tel que pour tout $\mu, \nu \in L$, $u, v \in W$, $(u\lambda + z\mu)(Y) \neq (v\lambda + z\nu)(Y)$ (ceci est possible car si $\lambda \in {}^*\mathfrak{a}_{\mathbb{C}}^{reg}$, $u\lambda + z\mu \neq v\lambda + z\nu$). On déduit de (i) que les séries $\Phi(\mathcal{C}_z w, u\lambda, \exp(tY)wH)$ sont uniformément convergentes en t sur $[1, +\infty[$. Par conséquent, l'existence des nombres complexes non tous nuls tels que $\sum_{u\in W} a_u \Phi(\mathcal{C}_z w, u\lambda, \exp(tY)wH) = 0$ contredit le lemme 4.4.2 de [11]. Donc la famille $\Phi(\mathcal{C}_z w, u\lambda, \cdot)$, $u \in W$, est libre. Ceci joint à (5.7) achève la démonstration de (v). ■

Dans toute la suite de l'article on notera $\mathcal{C}_z := \exp(-zC_P)$. On rappelle que $X_0 \in -zC_P$ et $a_t = \exp tX_0$.

Lemme 9. *Soit $\lambda \in {}^*\mathfrak{a}_{\mathbb{C}}^{reg}$, alors pour tout $u \in W$, $a \in \mathcal{C}_z$ on a:*

$$\lim_{t\to+\infty} (aa_{-t})^{u\lambda - z\rho} \Phi(\mathcal{C}_z w, -u\lambda,\ aa_{-t}wH) = 1,$$

et il existe $C > 0$, $t_1 > 0$ tels que

$$\forall a \in \mathcal{C}_z,\ \forall t > t_1,\ \mid (aa_{-t})^{u\lambda - z\rho} \Phi(\mathcal{C}_z w, -u\lambda,\ aa_{-t}wH) \mid < C.$$

Démonstration. Comme $X_0 \in zC_P$, on a:

$$\lim_{t\to+\infty} \min_{\beta\in\Sigma} \{z\beta(tX_0)\} = +\infty. \tag{5.9}$$

Il en résulte que:

$$\forall \delta > 0,\ \exists t_1 > 0,\ \forall t > t_1,\ \forall \alpha \in \Sigma,\ z\alpha(tX_0) > \delta. \tag{5.10}$$

On a d'après la proposition 3 (ii) :

$$\begin{aligned}&\exists \varepsilon > 0,\ \exists M > 0,\ \forall Y \in -zC_P,\ \forall \alpha \in \Sigma,\\ &-z\alpha(Y) > \varepsilon \Rightarrow \sum_{\mu\in L^+} \mid a_\mu(-u\lambda) \mid e^{z\mu(Y)} < M.\end{aligned} \tag{5.11}$$

(5.10) et (5.11) montrent en particulier qu'il existe $M > 0$ et $t_1 > 0$ tels que

$$\forall t > t_1,\ D(t) < M. \tag{5.12}$$

où $D(t) := \sum_{\mu\in L^+} \mid a_\mu(-u\lambda) \mid e^{-z\mu(tX_0)}$. On peut écrire $D(2t)$ sous la forme

$$D(2t) = \sum_{\mu\in L^+} \mid a_\mu(-u\lambda) \mid e^{-z\mu(tX_0)} e^{-z\mu(tX_0)}.$$

Donc, si on note $\mu_0 := \min_{\alpha\in\Sigma}\{z\alpha(X_0)\} > 0$, on a :

$$\forall t > 0, 0 \leq D(2t) \leq D(t)e^{-t\mu_0}. \tag{5.13}$$

D'après (5.12) $D(t)$ est borné pour $t > t_1$, donc (5.5) donne:

$$\lim_{t\to+\infty} D(t) = 0. \tag{5.14}$$

Comme pour tout $a \in \mathcal{C}_z$:

$$| 1 - (aa_{-t})^{u\lambda - z\rho}\Phi(\mathcal{C}_z w, -u\lambda,\ aa_{-t}wH) | \leq D(t), \tag{5.15}$$

il résulte de (5.14) et (5.15) que $\lim_{t\to+\infty}(aa_{-t})^{u\lambda-z\rho}\Phi(\mathcal{C}_z w, -u\lambda,\ aa_{-t}wH) = 1$. Puisque $D(t)$ est bornée pour $t > t_1$, la seconde assertion du lemme découle de (5.15). D'où le lemme. ∎

Proposition 4. *On conserve les notations du* §5*. Alors on a :*
(i) *Pour toute fonction* $\chi \in \mathcal{D}(G/H)$ *la fonction* $\lambda \to \Theta_\lambda^{x,\ y}(\chi)$ *est holomorphe sur* ${}^*\mathfrak{a}_{\mathbb{C}}^{reg}(x,\ y)$.
(ii) $\forall\lambda \in {}^*\mathfrak{a}_{\mathbb{C}}^{reg}(x,\ y)$, $\forall D \in \mathbb{D}(G/H)$,

$$D\Theta_\lambda^{x,\ y} = \gamma(D)(-\lambda)\Theta_\lambda^{x,\ y}.$$

(iii) *Soit* $\lambda \in {}^*\mathfrak{a}_{\mathbb{C}}^{reg}(x,\ y)$ *et* $w \in W$. *Il existe des nombres complexes*

$$c_w(x,\ y,\ \mathcal{C}_z,\ u,\ -\lambda),\ \textit{pour}\ x,\ y \in W$$

(ou $W_H \setminus W$*),* $u,\ z \in W$*, tels que:*

$$\forall a \in \mathcal{C}_z,\ \Theta_\lambda^{x,\ y}(awH) = \sum_{u\in W} c_w(x,\ y,\ \mathcal{C}_z,\ u,\ -\lambda)\Phi(\mathcal{C}_z w, -u\lambda, awH).$$

Ces nombres complexes sont uniques.
(iv) *Les fonctions* $\lambda \mapsto c_w(x,\ y,\ \mathcal{C}_z,\ u,\ -\lambda)$ *sont holomorphes sur* ${}^*\mathfrak{a}_{\mathbb{C}}^{reg}(x,\ y)$.

Démonstration.
(i) Soit $\chi \in \mathcal{D}(G/H)$. On l'identifie à un élément de $\mathcal{E}(G)$ invariant à droite par H. Pour tout μ, ν éléments de ${}^*\mathfrak{a}_{\mathbb{C}}^{reg}(x,\ y)$, on note

$$A(\mu,\ \nu) := \langle(\pi'_\mu(\chi)\xi_\mu^x)\check{}, (\xi_\nu^y)\check{}\rangle_{\mathcal{D}(K),\mathcal{D}'(K)}.$$

Prouvons l'holomorphie séparée de $A(\mu,\ \nu)$ dans ${}^*\mathfrak{a}_{\mathbb{C}}^{reg}(x,\ y)\times{}^*\mathfrak{a}_{\mathbb{C}}^{reg}(x,\ y)$. Fixons $\mu \in {}^*\mathfrak{a}_{\mathbb{C}}^{reg}(x,\ y)$. Comme la fonction $\nu \mapsto \tilde{\xi}_\nu^y$ est holomorphe de ${}^*\mathfrak{a}_{\mathbb{C}}^{reg}(x,\ y)$ dans $\mathcal{D}'(K)$ et $(\pi'_\mu(\chi)\xi_\mu^x)\check{} \in \mathcal{D}(K)$ (cf. §3), il en résulte que $A(\mu,\ \nu)$ est holomorphe dans ${}^*\mathfrak{a}_{\mathbb{C}}^{reg}(x,\ y)$ en ν. Fixons maintenant $\nu \in {}^*\mathfrak{a}_{\mathbb{C}}^{reg}(x,\ y)$ et montrons que $A(\mu,\ \nu)$ est holomorphe en μ sur ${}^*\mathfrak{a}_{\mathbb{C}}^{reg}(x,\ y)$. Il suffit de voir que $\mu \mapsto (\pi'_\mu(\chi)\xi_\mu^x)\check{}$ est holomorphe de ${}^*\mathfrak{a}_{\mathbb{C}}^{reg}(x,\ y)$ dans $\mathcal{D}(K)$ ou ce qui revient au même que $\mu \mapsto \pi'_\mu(\chi)\xi_\mu^x$ est holomorphe de ${}^*\mathfrak{a}_{\mathbb{C}}^{reg}(x,\ y)$ dans $\mathcal{E}(G)$. Mais l'holomorphie faible implique l'holomorphie (cf. [4], §3.3.1). Soit $T \in \mathcal{E}'(G)$ on a:

$$\begin{aligned}\langle\pi_\mu(\chi)\xi_\mu^x, T\rangle_{\mathcal{E}(G),\ \mathcal{E}'(G)} &= \langle\chi * \xi_\mu^x, T\rangle_{\mathcal{E}(G),\ \mathcal{E}'(G)}\\ &= \langle\xi_\mu^x, \check{\chi} * T\rangle_{\mathcal{D}'(G),\ \mathcal{D}(G)},\end{aligned}$$

Or $\mu \mapsto \xi^x_\mu$ est holomorphe de ${}^*\mathfrak{a}^{reg}_{\mathbb{C}}(x,\ y)$ dans $\mathcal{D}'(G)$, donc faiblement holomorphe, d'où le résultat voulu. L'holomorphie séparée de $A(\mu,\ \nu)$ en résulte. Mais toute fonction séparément holomorphe est holomorphe. Par restriction à la diagonale, il en résulte que $\lambda \in {}^*\mathfrak{a}^{reg}_{\mathbb{C}}(x,\ y) \mapsto \Theta^{x,\ y}_\lambda(\chi)$ est holomorphe.
(ii) Comme ξ^x_λ est propre sous l'action de $U(\mathfrak{g})^{\mathfrak{h}}$ (cf. [21], théorème 5.1), on a (ii).
(iii) découle de (ii) et de la proposition 3 (v).
(iv) Fixons z et $w \in W$. Soit $\lambda_0 \in {}^*\mathfrak{a}^{reg}_{\mathbb{C}}(x,\ y)$. Les $\Phi(\mathcal{C}_z w,\ -u\lambda_0)$, $u \in W$, sont linéairement indépendants comme fonctions C^∞ sur $\mathcal{C}_z wH$, donc également comme distributions sur $\mathcal{C}_z wH$ (ici on identifie les fonctions C^∞ à des distributions grâce à la mesure de la remarque 2). Alors il existe une famille $(\varphi_v)_{v\in W}$ d'éléments de $\mathcal{D}(\mathcal{C}_z wH)$ telle que $\det\langle\Phi(\mathcal{C}_z,\ -u\lambda_0), \varphi_v\rangle_{u,\ v} \neq 0$. On se fixe un voisinage ouvert de λ_0, V_{λ_0}, dans ${}^*\mathfrak{a}^{reg}_{\mathbb{C}}(x,\ y)$, tel que $\det\langle\Phi(\mathcal{C}_z,\ -u\lambda), \varphi_v\rangle_{u,\ v}$ (qui est holomorphe d'après la proposition 3 (iv)) soit nonnul pour $\lambda \in V_{\lambda_0}$. Soit $\psi \in \mathcal{D}(H/H\cap M)$ tel que $\int_{H/H\cap M} \psi(\ h)d\dot{h} = 1$. Avec les notations de §3. 2, pour $\mathcal{C} = \exp(-w^{-1}zC_P)$ on a, d'après la remarque 2 et l'assertion qui la précde, pour tout $\lambda \in {}^*\mathfrak{a}^{reg}_{\mathbb{C}}(x,\ y)$ et tout $v \in W$:

$$\langle\Theta^{x,\ y}_\lambda, \Phi^w(\psi, \tilde{\varphi}_v)\rangle = \langle\tilde{\Theta}^{x,\ y}_\lambda, \varphi_v\rangle$$

où $\tilde{\varphi}_v$ est l'élément de $\mathcal{D}(\mathcal{C})$ définit par $\tilde{\varphi}_v(a) = C_G^{-1}D_w(a)^{-1}\varphi_v(waH)$ et $\tilde{\Theta}^{x,\ y}_\lambda$ est la restriction de $\Theta^{x,\ y}_\lambda$ (regardée comme fonction analytique sur les éléments réguliers de G/H) à $\mathcal{C}_z wH$. Donc $\tilde{\Theta}^{x,\ y}_\lambda(\varphi_v)$ est holomorphe en $\lambda \in {}^*\mathfrak{a}^{reg}_{\mathbb{C}}(x,\ y)$ grâce à (i). D'après (ii) on a aussi:

$$\langle\tilde{\Theta}^{x,\ y}_\lambda, \varphi_v\rangle = \sum_{u\in W} c_w(x,\ y,\ \mathcal{C}_z,\ u,\ -\lambda)\langle\Phi(\mathcal{C}_z w,\ -u\lambda), \varphi_v\rangle.$$

Comme toutes les fonctions de λ figurant dans ce système d'équations sont holomorphes sur V_{λ_0}, il en va de même pour tous les $c_w(x,\ y,\ \mathcal{C}_z,\ u,\ -\lambda)$, puisque $\det\langle\Phi(\mathcal{C}_z w, -u\lambda), \varphi_v\rangle_{u,\ v}$ ne s'annule pas sur V_{λ_0}. Ceci prouve (iv). ∎

Théorème 2. *Pour $u \in W$, on note $\overline{u}$, l'unique élément de $\mathcal{W}$ tel que $u \in W_H\overline{u}$. Soient x, y, z éléments de W et $a \in \mathcal{C}_z = \exp(-zC_P)$. Pour $\lambda \in {}^*\mathfrak{a}^{reg}_{\mathbb{C}}(x,\ y)$ on a : $\forall a \in \mathcal{C}_z$,*

$$\Theta^{x,\ y}_\lambda(awH) = \sum_{u\in W} B_{\overline{w^{-1}z},\overline{x}}(z^{-1}u, \lambda)B_{\overline{zw_0},\overline{y}}(w_0z^{-1}u, -\lambda)\Phi(\mathcal{C}_z w, -u\lambda, awH).$$

Nous commençons la démonstration du théorème 2. Avec une démonstration similaire à celle du lemme 18 de [7] (en conservant les notations du §3, avec $\mathcal{C} = \mathcal{C}_z$ et en tenant compte des Φ^w_t; et également de la présence de waH dans la formule intégrale précédant la remarque 2 et celle de awH dans la définition des $\Phi(\mathcal{C}_z w,\ \lambda, .))$ on a :

Lemme 10. *Avec les notations de la proposition 4 et du théorème 2, on a pour tout $\lambda \in {}^*\mathfrak{a}^{reg}_{\mathbb{C}}(x,\ y)$:*

$$c_w(x,\ y,\ \mathcal{C}_z,\ z,\ -\lambda) = \begin{cases} B_{\overline{zw_0},\ \overline{y}}(w_0,\ -\lambda) & \textit{si } xz^{-1}w \in W_H, \\ 0 & \textit{sinon.} \end{cases}$$

∎

Lemme 11. *Avec les notations du lemme* 9, *on a, pour* $\lambda \in^{*} \mathfrak{a}_{\mathbb{C}}^{reg}(x,\ y)$ *et* $u \in W$ *:*

$$c_w(x,\ y,\ \mathcal{C}_z,\ u,\ -\lambda) = B_{\overline{w^{-1}z},\ \overline{x}}(z^{-1}u,\ \lambda)B_{\overline{zw_0},\ \overline{y}}(w_0z^{-1}u,\ -\lambda)$$

Démonstration. Soit $\lambda \in {}^{*}\mathfrak{a}_{\mathbb{C}}^{reg}(x,\ y)$ tel que $\Re e(\lambda-\rho)$ est strictement Δ^{+}-dominant. Soient $v \in W$ et $f \in \mathcal{D}(G/H)$.
Calculons $R := \langle \pi'_{v^{-1}\lambda}(f)A'(v,\ v^{-1}\lambda)\xi_{\lambda}^{x}, A'(v,\ -v^{-1}\lambda)\xi_{-\lambda}^{y}\rangle_{I_{-v^{-1}\lambda},\ (I_{-v^{-1}\lambda})'}$.
D'après (4.7), on a:

$$A'(v,\ v^{-1}\lambda)\xi_{\lambda}^{x} = \sum_{s\in\mathcal{W}} B_{s,\overline{x}}(v^{-1},\ \lambda)\xi_{v^{-1}\lambda}^{s}$$

et

$$A'(v,\ -v^{-1}\lambda)\xi_{-\lambda}^{y} = \sum_{t\in\mathcal{W}} B_{t,\ \overline{y}}(v^{-1},\ -\lambda)\xi_{-v^{-1}\lambda}^{t}.$$

On en déduit que

$$R = \sum_{s,\ t\in\mathcal{W}} B_{s,\ \overline{x}}(v^{-1},\ \lambda)B_{t,\ \overline{y}}(v^{-1},\ -\lambda)\Theta_{v^{-1}\lambda}^{s,\ t}(f). \tag{5.16}$$

D'autre part, en utilisant les propriétés d'entrelacement, on a:

$$R = \langle A'(v,\ v^{-1}\lambda)\pi'_{\lambda}(f)\xi_{\lambda}^{x}, A'(v,-\ v^{-1}\lambda)\xi_{-\lambda}^{y}\rangle$$

car $A'(v,\ v^{-1}\lambda)$ entrelace π'_{λ} et $\pi'_{v^{-1}\lambda}$. Or $\pi'_{\lambda}(f)\xi_{\lambda}^{x}$ est un élément de $I_{-\lambda}$, donc d'après la remarque 4 on a:

$$R = \langle A(v^{-1},-\lambda)\pi'_{\lambda}(f)\xi_{\lambda}^{x}, A'(v,-\ v^{-1}\lambda)\xi_{-\lambda}^{y}\rangle$$

et par transposition, on obtient:

$$R = \langle A(v,-\ v^{-1}\lambda)A(v,-\lambda)\pi'_{\lambda}(f)\xi_{\lambda}^{x}, \xi_{-\lambda}^{y}\rangle$$

Mais d'après (4.9) on a $A(v,-\ v^{-1}\lambda)A(v^{-1},-\lambda) = \eta_{v^{-1}}(-\lambda)Id$. Finalement on obtient

$$R = \eta_{v^{-1}}(-\lambda)\Theta_{\lambda}^{x,\ y}(f). \tag{5.17}$$

En comparant (5.16) et (5.17) on en déduit que

$$\eta_{v^{-1}}(-\lambda)\Theta_{\lambda}^{x,\ y} = \sum_{s,\ t\in\mathcal{W}} B_{s,\ \overline{x}}(v^{-1},\ \lambda)B_{t,\ \overline{y}}(v^{-1},\ -\lambda)\Theta_{v^{-1}\lambda}^{s,\ t}. \tag{5.18}$$

Utilisant (5.2) et l'expression de $\Theta_{\lambda}^{x,\ y}$ dans la proposition 4, on en déduit :

$$\eta_{v^{-1}}(-\lambda)c_w(x,\ y,\ \mathcal{C}_z,\ u,\ -\lambda) = \sum_{s,\ t\in\mathcal{W}} B_{s,\ \overline{x}}(v^{-1},\ \lambda)B_{t,\ \overline{y}}(v^{-1},\ -\lambda)$$
$$c_w(s,\ t,\ \mathcal{C}_z,\ uv,\ -v^{-1}\lambda).$$

En particulier pour $v = u^{-1}z$ on a:

$$\eta_{z^{-1}u}(-\lambda)c_w(x,\ y,\ \mathcal{C}_z,\ u,\ -\lambda) = \sum_{s,\ t\in\mathcal{W}} B_{s,\ \overline{x}}(z^{-1}u,\ \lambda)B_{t,\ \overline{y}}(z^{-1}u,\ -\lambda)$$
$$c_w(s,\ t,\ \mathcal{C}_z,\ z,\ -z^{-1}u\lambda). \tag{5.19}$$

Donc, d'après le lemme 10, ceci donne

$$\begin{aligned}&\eta_{z^{-1}u}(-\lambda)c_w(x,\ y,\ \mathcal{C}_z,\ u,\ -\lambda)\\&= B_{\overline{w^{-1}z},\ \overline{x}}(z^{-1}u,\ \lambda)\sum_{t\in\mathcal{W}} B_{\overline{zw_0},\ t}(w_0,\ -z^{-1}u\lambda)B_{t,\ \overline{y}}(z^{-1}u,\ -\lambda).\end{aligned} \tag{5.20}$$

On a:

$$\begin{aligned}&\sum_{t\in\mathcal{W}} B_{\overline{zw_0},\ t}(w_0,\ -z^{-1}u\lambda)B_{t,\ \overline{y}}(z^{-1}u,\ -\lambda)\\&= (B(w_0,\ -z^{-1}u\lambda)B(z^{-1}u,\ -\lambda))_{\overline{zw_0},\ \overline{y}}.\end{aligned} \tag{5.21}$$

Mais $l(w_0) = l(w_0z^{-1}u) + l(u^{-1}z)$. Donc d'après (4.10) on a:

$$B(w_0,\ -z^{-1}u\lambda) = B(w_0z^{-1}u,\ -\lambda)B(u^{-1}z, -z^{-1}u\lambda) \tag{5.22}$$

D'autre part on a, d'après (4.11):

$$B(u^{-1}z,\ -z^{-1}u\lambda)B(z^{-1}u,\ -\lambda) = \eta_{z^{-1}u}(-\lambda)I. \tag{5.23}$$

Donc grâce à (5.20), (5.21), (5.22) et après simplification par $\eta_{z^{-1}u}$, (5.19) devient:

$$c_w(x,\ y,\ \mathcal{C}_z,\ u,\ -\lambda) = B_{\overline{w}^{-1}z,\ \overline{x}}(z^{-1}u,\ \lambda)B_{\overline{zw_0},\ y}(w_0z^{-1}u,\ -\lambda).$$

■

Remarque 4. *Notre théorème* 2 *permet de retrouver aisément d'une autre manière le théorème* 5.1 *de* [13].

6. Front d'onde, restrictions de distributions et matrice B

On note $\mathcal{V} := \{\mu \in \mathfrak{a}_{\mathbb{C}}^* : \Re e(\mu - \rho)$ est $\Delta^+ - dominant\}$. Soient $w,\ y \in W$. Avec les notations du théorème 1 et du §4, on pose

$$u_\lambda^w := u_{\lambda,\ w_0}^{w,\ e}, v_\lambda^w := v_{\lambda,\ w_0}^{w,\ e} \text{ et } \eta_\lambda := \eta_{\lambda,\ e}.$$

Soient $\mathcal{M}$ une variété différentielle, $T \in \mathcal{D}'(\mathcal{M})$ et D un opérateur différentiel sur $\mathcal{M}$. On note $WF(T)$ le front d'onde de T (voir Appendice A), σ_D le symbole de D (cf. [3], prop. 2.1) et 0 est la section nulle du fibré cotangent de $\mathcal{M}$, $T^*\mathcal{M}$. On suppose qu'il existe une constante C_D telle que $DT = C_DT$, alors on a (cf. [17], th. 8.3.1):

$$WF(T) \subset \{(x,\ \xi) \in T^*M \setminus 0 : \sigma_D(x,\ \xi) = 0\} \tag{6.1}$$

Théorème 3. (i) *Soient $\lambda \in \mathcal{V}$ et $\nu \in \mathfrak{a}_{\mathbb{C}}^*$ tel que ξ_ν^y est défini. Pour tout $h \in H$, le produit des distributions (cf.*[17]*, th.* 8.2.10*) $\pi'_\lambda(hww_0)\eta_\lambda$ et ξ_ν^y est bien défini, ainsi que sa restriction à K.*
(ii) *Il existe un ouvert connexe dense, O, de $\mathfrak{a}_{\mathbb{C}}^*$ tel que pour $(\nu, \lambda) \in O \times \mathcal{V}$, le produit des distributions ξ_ν^y et $\pi'_\lambda(ww_0)\eta_\lambda$ est bien défini, et est holomorphe en ν.*
(iii) *Pour $\lambda \in (-O)\cap\mathcal{V}$ tel que $B(w_0, -\lambda)$ soit défini, ainsi que toutes les fonctions méromorphes, en nombre fini, intervenant dans (4.7), pour la valeur $-w_0\lambda$ au lieu de λ, on a:*

$$B_{\overline{w},\overline{y}}(w_0, -\lambda) = \langle((\pi'_\lambda(ww_0)\eta_\lambda)\xi_{-\lambda}^y)|_K, 1_K\rangle.$$

Démonstration.
(i) Soient λ et ν comme dans l'énoncé. On note $\eta_\lambda^w := \pi'_\lambda(w)\eta_{\lambda,w_0} = \pi'_\lambda(ww_0)\eta_\lambda$. Pour tout g élément de G, on identifie $\mathfrak{g}$ et T_gG en associant à $X \in \mathfrak{g}$ le vecteur tangent en $t = 0$ à la courbe dans G, $t \to g\exp tX$. En identifiant $\mathfrak{g}$ et $\mathfrak{g}^*$ à l'aide de la forme de Killing B, T_g^*G s'identifie naturellement à $\mathfrak{g}$. Si ξ est un élément de T_g^*G, on note X_ξ l'élément de $\mathfrak{g}$ correspondant à ξ dans cette identification. Il n'est pas difficile de voir que:

$$\forall X \in \mathfrak{g},\ \forall (g,\ \xi) \in T^*G,\ \sigma_{R_X}(g,\ \xi) = iB(X,\ X_\xi). \tag{6.2}$$

En remarquant que pour tout fonction C^∞ dans G, f, on a:

$$\forall X \in \mathfrak{g},\ (L_X f)(g) = -(R_{\mathrm{Ad}(g^{-1})X} f)(g).$$

On déduit de (6.2):

$$\forall X \in \mathfrak{g},\ \forall \xi \in T_g^*G,\ \sigma_{L_X}(g,\ \xi) = -iB(\mathrm{Ad}(g^{-1})X,\ X_\xi). \tag{6.3}$$

On note $\Gamma := \{(g,\ \xi) \in T^*G : \xi \neq 0, \forall X \in \mathfrak{h}, \forall Y \in \mathfrak{m} \oplus \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{n}, \sigma_{L_X}(g,\xi) = 0, \sigma_{R_Y}(g,\xi) = 0\}$. Alors Γ est un cône fermé de $T^*G \setminus 0$. De plus d'après l'invariance à gauche sous H de ξ_ν^y et sa covariance à droite sous P, on a grâce à (6.1):

$$WF(\xi_\nu^y) \subset \Gamma. \tag{6.4}$$

On a $L_h^*\eta_\lambda^w = L_{h^{-1}}\eta_\lambda^w$, où, dans le premier membre, L_h^* désigne l'image réciproque de η_λ^w par la translation à gauche par h et, dans le second membre, L_h désigne la représentation régulière gauche. Comme η_λ est invariante à gauche par $\theta(N)$, pour tout $h \in H$, $L_h^*\eta_\lambda^w$ est invariante à gauche par $h^{-1}ww_0(\theta(N))(h^{-1}ww_0)^{-1}$. Donc $L_h^*\eta_\lambda^w$ est invariante à gauche par $\mathrm{Ad}(h^{-1}ww_0)(\theta(\mathfrak{n}))$. En outre $L_h^*\eta_\lambda^w$ a des propriétés de covariance à droite sous P. Donc pour les mêmes raisons que ci-dessus on a:

$$\forall h \in H,\ WF(L_h^*\eta_\lambda^w) \subset \Gamma^h$$

où $\Gamma^h := \{(g,\ \xi) \in T^*G : \xi \neq 0, \forall X \in \theta(\mathfrak{n}), \forall Y \in \mathfrak{m} \oplus \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{n}, \sigma_{L_{\mathrm{Ad}(h^{-1}ww_0)X}}(g,\xi) = 0, \sigma_{R_Y}(g,\xi) = 0\}$. Soit Λ un sous-ensemble compact de H. On note $\Gamma_1 = \Gamma^e$ et $\Gamma_2 := \bigcup_{h\in\Lambda} \Gamma^h$. Comme Γ_1 est un cône fermé de $T^*G \setminus 0$, il résulte du lemme A.4 appliqué à $f :: H \times G \to G$, $(h,g) \mapsto hg = L_h(g)$, Λ et Γ_1, que Γ_2 est un cône fermé de $T^*G \setminus 0$. Montrons que $\Gamma \cap \Gamma_2 = \Gamma \cap -\Gamma_2 = \emptyset$. On note $\Gamma_g := (T_g^*G) \cap \Gamma$. Comme l'orthogonal de $\mathfrak{h}$ (resp. $\mathfrak{m} \oplus \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{n}$) relativement à la forme de Killing est $\mathfrak{q}$ (resp. $\mathfrak{n}$) on a d'après (6.2) et notre identification:

$$\Gamma_g = \mathfrak{n} \cap \mathrm{Ad}(g^{-1})\mathfrak{q} \setminus \{0\}. \tag{6.5}$$

De même comme l'orhogonal de $\theta(\mathfrak{n})$ est $\mathfrak{m} \oplus \mathfrak{a} \oplus \theta(\mathfrak{n})$ on a:

$$(\Gamma_1)_g = (\mathfrak{n} \setminus \{0\}) \cap \mathrm{Ad}(g^{-1}ww_0)(\mathfrak{m} \oplus \mathfrak{a} \oplus \theta(\mathfrak{n}))$$

et

$$(\Gamma_2)_g = (\mathfrak{n} \setminus \{0\}) \cap \bigcup_{h\in\Lambda} \mathrm{Ad}(g^{-1}hww_0)(\mathfrak{m} \oplus \mathfrak{a} \oplus \theta(\mathfrak{n})). \tag{6.6}$$

Si $X \in \mathfrak{q} \cap (\mathfrak{m} \oplus \mathfrak{a} \oplus \mathrm{Ad}(ww_0)(\theta(\mathfrak{n}))$, il existe $X_1 \in \mathfrak{m} \subset \mathfrak{h}$, $X_2 \in \mathfrak{a} \subset \mathfrak{q}$ et $X_3 \in \mathrm{Ad}(ww_0)(\theta(\mathfrak{n}))$ tels que $X = X_1 + X_2 + X_3$ et $\sigma(X) = -X$. Ceci implique que $X_1+\sigma(X_3) = -X_1-X_3$. Mais $\mathfrak{g} = \sigma(\mathrm{Ad}(ww_0)(\theta(\mathfrak{n}))\oplus\mathfrak{m}\oplus\mathfrak{a}\oplus\mathrm{Ad}(ww_0)(\theta(\mathfrak{n}))$, donc $X_1 = X_3 = 0$ et $X \in \mathfrak{a}$. Comme $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{q} \cap (\mathfrak{m} \oplus \mathfrak{a} \oplus \mathrm{Ad}(ww_0)(\theta(\mathfrak{n}))$, il en résulte:

$$\mathfrak{q} \cap (\mathfrak{m} \oplus \mathfrak{a} \oplus \mathrm{Ad}(ww_0)(\theta(\mathfrak{n})) = \mathfrak{a}. \tag{6.7}$$

Comme $\mathfrak{q}$ est invariant par H et ww_0 normalise $\mathfrak{m} \oplus \mathfrak{a}$, on a:

$$\begin{aligned} &\mathrm{Ad}(g^{-1})(\mathfrak{q}) \cap \mathrm{Ad}(g^{-1}h^{-1}ww_0)(\mathfrak{m} \oplus \mathfrak{a} \oplus \theta(\mathfrak{n})) \\ = \ &\mathrm{Ad}(g^{-1}h^{-1})(\mathfrak{q} \cap (\mathfrak{m} \oplus \mathfrak{a} \oplus \mathrm{Ad}(ww_0)(\theta(\mathfrak{n})))). \end{aligned}$$

Ceci joint à (6.7) donne:

$$\mathrm{Ad}(g^{-1})(\mathfrak{q}) \cap \mathrm{Ad}(g^{-1}h^{-1}ww_0)(\mathfrak{m} \oplus \mathfrak{a} \oplus \theta(\mathfrak{n})) = \mathrm{Ad}(g^{-1}h^{-1})(\mathfrak{a}).$$

En utilisant (6.6), il en découle que:

$$\Gamma_g \cap (-\Gamma_2)_g = (\mathfrak{n} \setminus \{0\}) \cap \bigcup_{h\in\Lambda} Ad(g^{-1}h^{-1})(\mathfrak{a})$$

où $-\Gamma_2 := \{(g,\xi) \in T^*G : (g,-\xi) \in \Gamma_2\}$. Or les éléments de $\mathrm{Ad}(g^{-1}h^{-1})(\mathfrak{a})$ sont semi-simples et ceux de $\mathfrak{n}$ sont nilpotents, d'où :

$$\Gamma \cap \Gamma_2 = \Gamma \cap -\Gamma_2 = \emptyset. \tag{6.8}$$

Donc si on note $\Gamma_3 := \Gamma \cup \Gamma_2 \cup \{(g,\xi+\eta) \in T^*G : (g,\xi) \in \Gamma, (g,\eta) \in \Gamma_2)\}$, avec les notations de l'appendice, l'application de $\mathcal{D}'{}_\Gamma(G) \times \mathcal{D}'_{\Gamma_2}(G)$ dans $\mathcal{D}'_{\Gamma_3}(G)$ définie par: $(S,T) \mapsto ST$ est bien définie (cf. [17], th.8.2.10) et séparément continue. De même comme pour tout $g \in G$ on a $(\Gamma_3)_g \subset \mathfrak{n}$ et $\mathfrak{p} \cap \mathfrak{n} = 0$, l'intersection du fibré normal de K avec Γ_3 est vide. Donc il résulte du corollaire 8.2.7 [17] que l'application de $\mathcal{D}'_{\Gamma_3}(G)$ dans $\mathcal{D}'(K)$: $T \mapsto T|_K$ est bien définie et est continue d'après la proposition A.3. Finalement, grâce à la proposition A.4 (ii), on a:
l'application de $\mathcal{D}'{}_\Gamma(G) \times \mathcal{D}'_{\Gamma_2}(G)$ dans $\mathcal{D}'(K)$ définie par:

$$(S,T) \mapsto (ST)|_K \tag{6.9}$$

est bien définie. C'est une application bilinéaire séparément séquentielement continue.

Comme $\pi'_\lambda(hww_0)\eta_\lambda \in \mathcal{D}'_{\Gamma_2}(G)$ et $\xi^y_\nu \in \mathcal{D}'{}_\Gamma(G)$, (i) résulte de (6.9).

(ii) Montrons qu'il existe un ouvert connexe dense, O, de $\mathfrak{a}^*_{\mathbb{C}}$ tel que pour tout $\lambda \in \mathcal{V}$, l'application définie sur O à valeurs dans $\mathcal{D}'_{\Gamma_3}(G)$ par: $\nu \mapsto \xi_\nu\pi'_\lambda(ww_0)\eta_\lambda$, soit holomorphe. On se propose d'appliquer la proposition B.2 de [5], pour démontrer une propriété d'holomorphie de ξ_ν. On conserve les notations du §8.1 et on définit une application u de $\mathcal{V}$ dans $C(G)$ par $u(\nu) = \xi^y_\nu$. C'est une application holomorphe lorsque $C(G)$ est muni de la topologie de la convergence uniforme sur les compacts de G (voir démonstration de l'holomophie de $F_{\nu,v}$ dans le lemme 11 de [5]). Pour tout $\nu \in \mathcal{V}$, on définit les polynômes d'une variables complexes z suivants:

$$P_X(\nu,z) = \begin{cases} z & \text{si } X \in \mathfrak{h} \cup \mathfrak{m} \cup \mathfrak{n}, \\ z - e^{(\nu-\rho)(X)} & \text{si } X \in \mathfrak{a}. \end{cases}$$

Il est clair d'après les propriétés d'invariance de ξ_ν^y que $P_X(\nu, L_X)(u(\nu)) = 0$ si $X \in \mathfrak{h}$, et $P_X(\nu, R_X)(u(\nu)) = 0$ si $X \in \mathfrak{m} \cup \mathfrak{a} \cup \mathfrak{n}$. Les polynômes $P_X(\nu, z)$ sont tous de la forme $z - \lambda_X(\nu)$ où λ_X est une fonction holomorphe sur $\mathcal{V}$. Donc en tenant compte de la définition de Γ et de l'holomorphie de u, on peut appliquer la proposition B.2 de [5] à Γ et u. Il en résulte que:

$$u \text{ est holomorphe de } \mathcal{V} \text{ dans } \mathcal{D}'_\Gamma(G). \tag{6.10}$$

Comme $\mathfrak{a}$ est contenu $\mathfrak{p} \cap \mathfrak{q}$ et est abélien maximal dans $\mathfrak{q}$, on a, d'après [2], th.9.3 (i), pour tout $\mu \in \Lambda^+(\mathfrak{a}) := \{\alpha \in \mathfrak{a}_\mathbb{C}^* : \dfrac{(\alpha, \beta)}{(\beta, \beta)} \in \mathbb{N}, \forall \beta \in \Delta^+\}$, il existe une fonction polynômiale b_μ sur $\mathfrak{a}_\mathbb{C}^*$, non identiquement nulle et une fonction polynômiale sur $\mathfrak{a}_\mathbb{C}^*$ à valeurs dans l'algèbre des opérateurs différentiels (en particulier à valeurs dans un espace vectoriel de dimension finie), $\tilde{D}_\mu$, tels que:

$$b_\mu(\nu)\xi_\nu^y = \tilde{D}_\mu(\nu)\xi_{\nu+\mu}^y. \tag{6.11}$$

On rapelle que les μ_i, $i = 1, \ldots, l$, sont des éléments de $\Lambda^+(\mathfrak{a})$ (cf. §2) et forment une base de $\mathfrak{a}_\mathbb{C}^*$. On note $\mu_o := \sum_{i=1}^{l} \mu_i$. Alors μ_0 est aussi un élément de $\Lambda^+(\mathfrak{a})$, et on voit facilement que $\mathfrak{a}_\mathbb{C}^* = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} (\mathcal{V} - n\mu_0)$. On pose

$$O := \bigcup_{n \in \mathbb{N}} O_n$$

où O_n est complémentaire de l'ensemble des zéros du polynôme $b_{n\mu_0}$ dans $(\mathcal{V} - n\mu_0)$. Donc O_n est connexe (cf. [28], ch. I, lemme 6.A). Comme, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mu_0 + \rho$ est élément de O_n, O est connexe. D'autre part, il est clair que O est un ouvert dense dans $\mathfrak{a}_\mathbb{C}^*$. Comme les opérateurs différentiels sont des endomorphismes continus de $\mathcal{D}'_\Gamma(G)$ (cf. [17], (8.1.11)), Il en résulte, d'après l'équation fonctionnelle (6.11) et grâce à (6.10), que pour tout $n \in \mathbb{N}$, ξ_ν admet un prolongement holmorphe de O_n dans $\mathcal{D}'_\Gamma(G)$, donc de O dans $\mathcal{D}'_\Gamma(G)$. Maintenant ceci joint à (6.9), montre que le produit des distributions ξ_ν^y et $\pi'_\lambda(ww_0)\eta_\lambda$ est bien défini, et est holomorphe en ν. Cela achève la démonstration de (ii).

(iii) Soit λ comme dans l'énoncé. On reprend les notations du théorème 1. On suppose dans toute la suite de la démonstration que $\int_{\mathcal{C}_P} a^{-w_0(\lambda+\rho)}\varphi(a)da = 1$. On rappelle que $u_\lambda^w = A'(w_0,\ \lambda)v_\lambda^w$ où v_λ^w est un élément de $I_{-w_0\lambda}$ (voir (4.3)). On note $\tilde{\psi}$ un élément de $\mathcal{D}(H)$ tel que:

$$\forall h \in H,\ \psi(\dot{h}) = \int_{H \cap M} \tilde{\psi}(hm)dm.$$

On prend $\Lambda = \operatorname{supp}\psi$.

On effectue de deux façons différente le calcul de $\langle u_\lambda^w, \xi_{-\lambda}^y \rangle$.

Le premier calcul est analogue à celui de [7] et donne:

$$\langle u_\lambda^w, \xi_{-\lambda}^y \rangle = B_{\overline{w},\overline{y}}(w_0,\ -\lambda) \int_H \tilde{\psi}(h)dh. \tag{6.12}$$

Effectuons le deuxième calcul de $\langle u_\lambda^w, \xi_{-\lambda}^y\rangle$. On rappelle que u_λ^w est un élément de $I_{-w_0\lambda}$, en particulier sa restriction à K est une fonction C^∞. On en déduit que:

$$\langle u_\lambda^w, \xi_{-\lambda}^y\rangle_{I_{-\lambda},(I_{-\lambda})'} = \langle (u_\lambda^w \xi_{-\lambda}^y)|_K, 1_K\rangle_{\mathcal{D}'(K),\ \mathcal{D}(K)}. \qquad (6.13)$$

La continuité séquentielle séparée de l'application $\mathcal{D}'_\Gamma(G) \times \mathcal{D}'_{\Gamma_2}(G) \to \mathcal{D}'(K)$: $(S,T) \mapsto (ST)|_K$ (cf. (6.9)) montre que l'application γ définit de $\mathcal{D}'_{\Gamma_2}(G)$ dans $\mathbb{C}$ par $\gamma(S) = \langle (S\xi_{-\lambda}^y)|_K, 1_K\rangle_{\mathcal{D}'(K),\ \mathcal{D}(K)}$ est une forme linéaire continue sur $\mathcal{D}'_{\Gamma_2}(G)$. Mais $u_\lambda^w = \int_H \tilde{\psi}(h)\pi'_\lambda(hw)\eta_{\lambda,w_0}dh$ (cf. [7], p. 339). Donc u_λ^w est l'intégrale de Riemann dans $\mathcal{D}'(G)$ de la fonction continue à support compact définie sur H par: $h \mapsto \tilde{\psi}(h)L_h^*\eta_\lambda^w$. Mais cette dernière prends ses valeurs dans $\mathcal{D}'_{\Gamma_2}(G)$ (voir fin de la démonstration de (i)), il résulte de la proposition A.3, appliquée à $X = G, Y = G, Z = H$ et $f: H \times G \to G, (h,g) \mapsto hg$, que c'est une intégrale de Riemann dans $\mathcal{D}'_{\Gamma_2}(G)$. Donc il découle des propriétés des intégrales de Riemann que: $\gamma(u_\lambda^w) = \int_H \gamma(\tilde{\psi}(h)L_h^*\eta_\lambda^w)dh$, c'est à dire:

$$\langle u_\lambda^w, \xi_{-\lambda}^y\rangle_{I_{-\lambda},(I_{-\lambda})'} = \int_H \tilde{\psi}(h)\langle ((L_h^*\eta_\lambda^w)\xi_{-\lambda}^y)|_K, 1_K\rangle dh.$$

Comme pour tout $g \in G$, $v \in I'_{-\rho}$, on a $\langle L_g v|_K, 1_K\rangle = \langle v|_K, 1_K\rangle$, on en déduit que:

$$\langle u_\lambda^w, \xi_{-\lambda}^y\rangle_{I_{-\lambda},(I_{-\lambda})'} = (\int_H \tilde{\psi}(h)dh)\langle (\eta_\lambda^w \xi_{-\lambda}^y)|_K, 1_K\rangle \qquad (6.14)$$

En comparant (6.12) et (6.14), on en déduit que :

$$B_{\overline{w},\overline{y}}(w_0, -\lambda) = \langle (\eta_\lambda^w \xi_{-\lambda}^y)|_K, 1_K\rangle.$$

Ceci achève la démonstration du théorème. ∎

Calcul de B dans le cas de $SO(p,1)/SO(p-1,1)$, $p > 1$

Dans ce cas, il existe une seule racine positive relativement à P, α. On note s_α la reflexion correspondante. Comme ces espace symétriques sont de type G/K_ε, ce calcul peut être déduit de [23], th. 4.10. Ici on procéde différement, en utilisant le théorème 3. On a l'égalité des fonctions méromorphes:

$$B_{e,\overline{s}_\alpha}(s_\alpha, -\lambda) = B_{\overline{s}_\alpha,e}(s_\alpha, -\lambda) = \frac{4^{p-2}\Gamma(\frac{p-1}{2})(\Gamma(\frac{p}{2}))^2\Gamma(\frac{3-p}{2} - t)}{\pi\Gamma(p-1)\Gamma(1-t)}$$

$$B_{e,e}(s_\alpha, -\lambda) = B_{\overline{s}_\alpha,\ \overline{s}_\alpha}(s_\alpha, -\lambda) = \begin{cases} \dfrac{4^{p-2}(\Gamma(\frac{p}{2}))^2\Gamma(\frac{3-p}{2} - t)\Gamma(t)}{\pi\Gamma(p-1)\Gamma(\frac{3-p}{2})} & \text{si } p \text{ est pair,} \\ 0 & \text{si } p \text{ est impair,} \end{cases}$$

où $\lambda = t\alpha$ avec $t \in \mathbb{C}$.

En effet, comme il s'agit d'une égalité de fonctions méromorphes, il suffit de prouver la proposition pour λ comme dans le théorème 3 (iii). Soit $(e_1, \cdots, e_{p+1})$ la base canonique de $\mathbb{R}^{p+1}$. Si on note $\Xi := \{x \in \mathbb{R}^{p+1} : x_1^2 + \cdots + x_p^2 - x_{p+1}^2 = 0, x_{p+1} > 0\}$, G agit transitivement sur Ξ et le stabilisateur de $e_1 + e_{p+1}$ est égal à MN(cf. [16],part II, exemple 5.3). Donc G/MN s'identifie à Ξ. Alors HP/MN s'identie à $HP.(e_1 + e_{p+1}) = \{x \in \Xi : x_1 > 0\}$ et $Hs_\alpha P/MN$ à $\{x \in \Xi : x_1 < 0\}$. Donc il y a deux orbites ouvertes et $\mathcal{W} = \{1, s_\alpha\}$. On identifie aussi $\mathfrak{a}_\mathbb{C}^*$ à $\mathbb{C}$ en associant à tout $s \in \mathbb{C}$ l'élément $s\alpha \in \mathfrak{a}_{\mathbb{C}}^*$. Comme e_1 est H-invariant, $e_1 + e_{p+1}$ est N-invariant et pour tout $t \in \mathbb{C}$, on a $a_t.(e_1 + e_{p+1}) = a_t^{\alpha}(e_1 + e_{p+1})$. Il en résulte que si $\lambda = s\alpha$ on a:

$$\begin{aligned} \xi_\lambda^w(g) &= \begin{cases} |(g.(e_1 + e_{p+1}), e_1)|^{s-\frac{p-1}{2}} & \text{si } g \in HwP \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \\ \eta_\lambda(g) &= \frac{1}{2^{s-\frac{p-1}{2}}}(g.(e_1 + e_{p+1}), (e_1 + e_{p+1}))^{s-\frac{p-1}{2}}. \end{aligned} \tag{6.15}$$

Pour $\lambda = s\alpha$, on note ξ_s^+ (resp. ξ_s^-), l'application définie sur Ξ par $\xi_s^+(x) = \xi_\lambda^e(g)$ (resp. $\xi_s^-(x) = \xi_\lambda^{s_\alpha}(g)$) si $x = g.(e_1 + e_{p+1})$. De la même façon on note η_s^+ (resp. η_s^-), l'application définie sur Ξ par $\eta_s^+(x) = \eta_\lambda(g)$ (resp. $\eta_s^-(x) = \eta_\lambda(s_\alpha g)$ si $x = g.(e_1 + e_{p+1})$). Il résulte donc de (6.15) et de nos identifications que pour tout $x \in \Xi$ on a:

$$\begin{aligned} &\xi_s^+(x) = (\sup(x_1, 0))^{s-\frac{p-1}{2}}, \xi_s^-(x) = (\sup(-x_1, 0))^{s-\frac{p-1}{2}}; \\ &\eta_s^+(x) = \frac{|x_1 + x_{p+1}|^{s-\frac{p-1}{2}}}{2^{s-\frac{p-1}{2}}}, \eta_s^-(x) = \frac{|x_{p+1} - x_1|^{s-\frac{p-1}{2}}}{2^{s-\frac{p-1}{2}}} \end{aligned} \tag{6.16}$$

On reprend les notations du théorème 3. Soient $\lambda = t\alpha \in \mathcal{V}$ et $\nu = s\alpha$ un élément de $O \cap \mathcal{V}$, on a:

$$\langle(\xi_\nu^e \eta_\lambda)|_K, 1_K\rangle = \int_K \xi_\nu^e(k)\eta_\lambda(k)dk \text{ (bien défini (cf. th. 3)).}$$

Mais ξ_ν^e et η_λ sont invariantes à droite par $K \cap M$. Donc, avec notre choix de mesure (cf. §2.4), on a:

$$\langle(\xi_\nu^e \eta_\lambda)|_K, 1_K\rangle = \int_{K/K\cap M} \xi_\nu^e(k)\eta_\lambda(k)d\dot{k}. \tag{6.17}$$

Rappelons que $K/K \cap M$ s'identifie naturellement à $S^{p-1} \times \{1\}$ dans Ξ (cf. [16], exemple 2.2). Si on note respectivement $\tilde{\xi}_s$ et $\tilde{\eta}_s$ les restrictions de ξ_s et η_t à $S^{p-1} \times \{1\}$, pour tout $x \in S^{p-1} \times \{1\}$, $\tilde{\xi}_s$ et $\tilde{\eta}_t$ sont données par des formules analogues à (6.16). Donc (6.17) devient:

$$\langle(\xi_\nu^e \eta_\lambda)|_K, 1_K\rangle = \frac{1}{2^{t-\frac{p-1}{2}}} \int_{S^{p-1}} (\sup(x_1, 0))^{s-\frac{p-1}{2}}(1 + x_1)^{t-\frac{p-1}{2}} dx. \tag{6.18}$$

En coordonnées sphériques, ceci s'écrit:

$$\langle(\xi_\nu^e \eta_\lambda)|_K, 1_K\rangle = c_t \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos\theta_1)^{s-\frac{p-1}{2}}(1 + \cos\theta_1)^{t-\frac{p-1}{2}} \sin^{p-2}\theta_1 d\theta_1,$$

où $c_t = \frac{2^{p-2}(\Gamma(\frac{p}{2}))^2}{2^{t-\frac{p-1}{2}}\pi\Gamma(p-1)}$. On fait le changement de variable $z = \cos\theta$ et l'on a:

$$\langle(\xi_\nu^e \eta_\lambda)|_K, 1_K\rangle = c_t \int_0^1 z^{s-\frac{p-1}{2}}(1 - z)^{\frac{p-3}{2}}(1 + z)^{t-1} dz. \tag{6.19}$$

En utilisant [9], §2.1.3, formule (10), on obtient:

$$\langle(\xi_\nu^e \eta_\lambda)|_K, 1_K\rangle = c_t \frac{\Gamma(s + \frac{3-p}{2})\Gamma(\frac{p-1}{2})}{\Gamma(s + 1)} F(1 - t, s + \frac{3 - p}{2}; s + 1; -1). \tag{6.20}$$

Mais d'après [9], §2.1.4, formule (22), on a:

$$F(a,b,c;z) = (1-z)^{-a} F(a, c-b, c; \frac{z}{z-1}).$$

Donc on obtient:

$$F(1-t, s+\frac{3-p}{2}; s+1; -1) = 2^{-(1-t)} = 46(1-t, \frac{p-1}{2}; s+1; \frac{1}{2}).$$

Le membre de droite de cette égalité divisé par $\Gamma(s+1)$ est holomorphe en s sur $\mathbb{C}$ (cf. [9], §2.1.6). Donc il résulte de l'holomorphie de $\nu \mapsto \langle (\xi_\nu^e \eta_\lambda)|_K, 1_K \rangle$ sur O (cf. th. 3 (ii)) que (6.20) qui est vrai pour $\nu \in O \cap \mathcal{V}$, se prolonge à O. Alors pour λ comme dans le théorème 3 (iii), on a:

$$B_{s_\alpha,e}(s_\alpha, -\lambda) = c_t \frac{\Gamma(\frac{3-p}{2}-t)\Gamma(\frac{p-1}{2})}{\Gamma(1-t)} 2^{t-1} F(1-t, \frac{p-1}{2}; 1-t; \frac{1}{2}). \qquad (6.21)$$

C'est une identité de fonctions méromorphes sur $\mathbb{C}$. Mais on a:

$$\begin{aligned} &(1+z)^a = F(-a,b;b;-z) et \\ &F(a,b;c;z) = F(b,a;c;z) \end{aligned} \qquad (6.22)$$

(cf. [9], §2.8, formules (4) et (8)). Donc on a:

$$\begin{aligned} = 46(1-t, \frac{p-1}{2}; 1-t; \frac{1}{2}) &= F(-\frac{1-p}{2}, 1-t, 1-t; \frac{1}{2}) \\ &= 2^{\frac{p-1}{2}}. \end{aligned}$$

Ceci joint à (6.21) donne:

$$B_{s_\alpha,e}(s_\alpha, -\lambda) = \frac{4^{p-2}\Gamma(\frac{p-1}{2})(\Gamma(\frac{p}{2}))^2\Gamma(\frac{3-p}{2}-t)}{\pi\Gamma(p-1)\Gamma(1-t)}. \qquad (6.23)$$

En procédant d'une façon similaire, on aboutit au résultat voulu.

Appendice

Dans toute la suite de cet appendice on énoncera sans démonstration les résultats établis dans [26], appendice. Pour toutes les variétés différentielles citées dans cet appendice, on fixe une mesure de Lebesgue de sorte que les fonctions généralisés s'identifient à des distributions. Soient X, Y et Z des variétés différentielles C^∞. On note $m = \dim X$ et $n = \dim Y$. Si K est un sous-ensemble compact de X on note $\mathcal{D}_K(X)$ l'ensemble des fonctions C^∞ sur X à support dans K muni de sa topologie usuelle.
On note T^*X le fibré cotangent de X et 0 la section nulle de T^*X. Soit Γ un cône fermé de $T^*X \setminus 0$. On note pour tout $u \in \mathcal{D}'(X)$, $WF(u)$, le front d'onde de u (cf. [17], vol.1 §8.2). On note

$$\mathcal{D}'_\Gamma(X) := \{u \in \mathcal{D}'(X)' : WF(u) \subset \Gamma\}.$$

On muni $\mathcal{D}'_\Gamma(X)$ des semi-normes suivantes:
(a) $p_\chi(u) = |\langle u,\ \chi\rangle|$ pour $\chi \in \mathcal{D}(X)$.
(b) Si $\varphi : U \to V \subset X$ est une carte locale de X (U ouvert de $\mathbb{R}^m$), on définit pour tout $N \in \mathbb{N}$, $\phi \in \mathcal{D}(U)$ et C cône fermé de $\mathbb{R}^m$ tel que ${}^t((\varphi^{-1})')(\mathrm{supp}\ \phi \times C) \cap \Gamma = \emptyset$:

$$p_{\varphi,\ N,\ \phi, C}(u) = \sup_{\xi \in C} \parallel \xi \parallel^N |\mathcal{F}(\phi(\varphi^* u)(\xi))|$$

où $\varphi^* u$ est l'image réciproque par φ de la restriction de u à V et $\mathcal{F}$ désigne la transformée de Fourier des distributions à support compact.
Soit f une application C^∞ de $Z \times X$ dans Y telle que pour tout $z \in Z$, l'application $f_z : x \in X \mapsto f(z,x)$ est submersive. Soient Λ un sous-ensemble compact de Z, Γ_1 et Γ_2 deux ensembles coniques fermés respectivement dans $T^*Y \setminus 0$ et $T^*X \setminus 0$ tels que:

$$\forall \lambda \in \Lambda,\ f_\lambda^* \Gamma_1 \subset \Gamma_2$$

où $f_\lambda^*\Gamma_1 := \{(x, {}^t f'_\lambda(x)\eta) : (f_\lambda(x), \eta) \in \Gamma_1\}$. Donc pour tout $\lambda \in \Lambda$, $f_\lambda^* \colon \mathcal{D}'_{\Gamma_1}(Y) \to \mathcal{D}'_{\Gamma_2}(X)$ est bien définie (cf. [17],th. 8.2.4).

Proposition A1. *Soit (u_j) une suite de $\mathcal{D}'_{\Gamma_1}(Y)$ qui converge vers 0 pour la topologie de $\mathcal{D}'_{\Gamma_1}(Y)$ définie ci-dessus. Alors la suite d'applications $g_j \colon \Lambda \to \mathcal{D}'_{\Gamma_2}(X)$, définie par $g_j(\lambda) = f_\lambda^*(u_j)$, pour tout $j \in \mathbb{N}$ et $\lambda \in \Lambda$, converge uniformément vers 0, pour la topologie de $\mathcal{D}'_{\Gamma_2}(X)$ définie ci-dessus.*

Proposition A2. *Soit $u \in \mathcal{D}'_{\Gamma_1}(Y)$. L'application de Λ dans $\mathcal{D}'_{\Gamma_2}(X)$ qui associe à $\lambda \in \Lambda$ $f_\lambda^*(u)$ est continue.*

Lemme A1. *$\mathcal{D}'_\Gamma(X)$, muni de ses semi-normes, est séquentiellement complet.*

Lemme A2. *Si on note $\Gamma'_2 := \bigcup_{\lambda \in \Lambda} f_\lambda^* \Gamma_1$ alors Γ'_2 est un cône fermé dans $T^*X \setminus 0$.*

Proposition A3. *Pour tout $\psi \in C_c(Z)$, $u \in \mathcal{D}_{\Gamma_1}(Y)$, l'intégrale au sens de Riemann $\int_Z \psi(z) f_z^*(u) dz$ dans $\mathcal{D}'_{\Gamma'_2}(X)$ (resp. $\mathcal{D}'(X)$) muni de sa topologie naturelle (resp. forte) existe. Ces deux intégrales coïncident.*

Soient X et Y deux variétés différentielles de dimension respectivement m et n. Soit Γ_1 (resp. Γ_2) un cône fermé de $T^*X \setminus 0$ (resp. $T^*Y \setminus 0$). Soit Γ un cône fermé de $T^*(X \times Y) \setminus 0$ contenant $\Gamma_1 \times \Gamma_2$. Dans ces conditions l'application $f : \mathcal{D}'_{\Gamma_1}(X) \times \mathcal{D}'_{\Gamma_2}(Y) \to \mathcal{D}'_\Gamma(X \times Y)$, $(S,T) \mapsto (S \otimes T)$, est bien définie (cf. [17], th. 8.2.9).

Proposition A4. (i) *Avec les hypothèses ci-dessus, l'application f est séparément séquentielement continue.*

(ii) *Avec les hypothèses de* (i), *on suppose de plus que $X = Y$ et $\Gamma_1 \cap (-\Gamma_2) = \emptyset$. Soit δ l'application définie sur X à valeurs dans $X \times X$ par $\delta(x) = (x,x)$. Soit $N_\delta := \{(\eta_1, \eta_2) \in \mathbb{R}^{2n} : \eta_1 + \eta_2 = 0\}$. Supposons que Γ ne rencontre pas N_δ. Alors l'application $F \colon \mathcal{D}'_{\Gamma_1}(X) \times \mathcal{D}'_{\Gamma_2}(X) \to \mathcal{D}'_{\delta^*\Gamma}(X)$, $(S,T) \mapsto \delta^*(S \otimes T)$, qui est bien définie (cf.* [17], th. 8.2.9 *et* th. 8.2.10*), est séparément séquentiellement continue. F est appelé "produit de distributions".*

References

[1] van den Ban, E. P., *The principal series for a reductive symmetric space I, H-fixed distribution vectors*, Ann. Sci. Ec. Norm. Sup. **21** (1988), 359–412.

[2] —, *The principal series for a reductive symmetric space II. Eisenstein integrals*, J. Funct. Anal. **109** (1992), 331–441.

[3] Berline, N., E. Getzler, and M. Vergne, "Heat Kernels and Dirac Operators," Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 1992.

[4] Bourbaki, N., "Variétés différentiables et analytiques," in "Fascicule de résultats, 1 à 7," Eléments de Mathématiques XXXIII, Hermann, Paris, 1967.

[5] Brylinski, J., et P. Delorme, *Vecteurs distributions H-invariants pour les séries principales généralisées d'espaces symétriques réductifs et prolongement méromorphe d'intégrales d'Eisenstein*, Invent. math. **109** (1992), 619–664.

[6] Carmona, J., et P. Delorme, *Base méromorphe de vecteurs distributions H-invariants pour les séries principales généralisées d'espaces symétriques réductifs: équation fonctionnelle*, J. Funct. Anal. **122** (1994), 152–221.

[7] Delorme, P., *Coefficients généralisés de séries principales sphériques et distributions sphériques sur $G_{\mathbb{C}}/G_{\mathbb{R}}$*, Invent. Math. **105** (1991), 305–346.

[8] van Dijk, G., and M. Poel, *The Plancherel formula for the pseudo-riemannian space $SL(n,\mathbb{R})/GL(n-1,\mathbb{R})$*, Compos. Math. **58** (1986), 371–397.

[9] Erdelyi, A., "Higher transcendental functions," vol. I. Mc Graw Hill, New York Toronto, 1953.

[10] Faraut, J., *Distributions sphériques sur les espaces hyperboliques*, J. math. pures et appl. **58** (1979), 369–444.

[11] Gangolli, R., and V. S. Varadarajan, *Harmonic analysis of spherical functions on real reductive groups*, in "Ergeb. Math. Grenzgeb., Vol.**101**, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1988.

[12] Harinck, P., "Fonctions généralisées sphériques sur un $G_{\mathbb{C}}/G_{\mathbb{R}}$," Thèse de doctorat, Université Paris-VI, 1988.

[13] —, *Base de la série la plus continue de fonctions généralisées sphériques sur $G_{\mathbb{C}}/G_{\mathbb{R}}$*, Preprint (Université Paris-VII).

[14] Harish-Chandra, *Harmonic analysis on real reductive groups I*, J. Func. Anal. **19** (1975), 104–204.

[15] —, *Spherical functions on a semisimple Lie group I*, Amer. J. Math. **80** (1958), 241–310.

[16] Heckman, G. J., and H. Schlichtkrull, *Harmonic Analysis and Special functions on Symmetric Spaces*, Perspectives in Mathematics, Vol.**16**, Academic Press, San Diego, New York, Boston, London, Sydney, Tokyo, Toronto, 1994.

[17] Hörmander, L., "The analysis of linear partial differential operators I," Second Edition, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1983.

[18] Knapp, A., and E. Stein, *Interwining operators for semisimple groups II*, Invent. Math. **60** (1980), 9–84.

[19] Kosters, M. T., and G. van Dijk, *Spherical distributions on the pseudo-riemannian space* $SL(n,\mathbb{R})/GL(n-1,\mathbb{R})$, J. Func. Anal. **68** (1986), 168–213.

[20] Molchanov, V. F., *Harmonic analysis on semisimple symmetric spaces of rank one. Representation theory of Lie and Lie groups*, Proceedings of the Fuji-Kawaguchiko Conference; World Scientific, Singapore, New Jersey, London, Hong Kong (1990), 184–205.

[21] Olafsson, G., *Fourier and Poisson transformation associated to a semisimple symmetric space*, Invent. math. **90** (1987), 605–629.

[22] Oshima, T., and T. Matsuki, *Orbits on affine symmetric spaces under the action of the isotropy subgroups*, J. Math. Soc. Japan. **32** (1980), 331–390.

[23] Oshima, T., and J. Sekiguchi, *Eigenspaces of invariant differential operators on an affine symmetric space*, Invent. math. **57** (1980), 1–81.

[24] Sano, S., *Distributions sphériques invariantes sur les espaces symétriques semi-simples* $G_{\mathbb{C}}/G_{\mathbb{R}}$, J. of Math. Kyoto Univ. **31** (1991), 377–417.

[25] Schlichtkrull, H., "Hyperfunctions and harmonic analysis on symmetric spaces," Progress in mathematics. Vol.**49**, Birkhäuser Verlag, Boston, Basel, Stuttgart, 1984.

[26] Tinfou, M., "Coefficients généralisés de séries principales sphériques relatifs aux espaces symétriques déployés," Thèse de Doctorat, Université de la Méditerranée, Aix-Marseille II, 1996.

[27] Wallach, N., "Real reductive groups II," Academic Press, New York, London, 1992.

[28] Whitney. H., "Complex Analytic Varieties," Addison-Wesley, Reading, 1972.

Institut de Mathématiques
de Luminy
163, avenue de Luminy - Case 907
13288 Marseille Cedex 9

Received May 19, 1998
and in final form May 7, 1999