Journal of Lie Theory
Volume **17** (2007) 505–524

Sur la Propriété (T) tordue par un produit tensoriel

Maria-Paula Gomez-Aparicio

Communicated by A. Valette

Résumé. Dans cet article on définit une propriété (T) tordue en considérant des produits tensoriels de représentations unitaires par des représentations irréductibles de dimension finie non-unitaires d'un groupe topologique. On démontre, en utilisant la décroissance uniforme des coefficients de matrices des représentations unitaires d'un groupe de Lie réel simple G, ayant la propriété (T) de Kazhdan, que toute représentation irréductible de dimension finie ρ de G est isolée parmi les représentations de la forme $\rho \otimes \pi$, où π parcourt les représentations unitaires irréductibles de G, dans un sens que l'on prrécisera.

Abstract. In this article, we consider tensor products of unitary representations by irreducible non-unitary finite dimensional representations of topological groups to define a property that is a twisting of Kazhdan's Property (T). We use the uniform decay of the matrix coefficients of unitary representations, to show that for most of the real semi-simple Lie groups having Kazhdan's Property (T), any finite dimensional irreducible representation ρ of G, is isolated among representations of the form $\rho \otimes \pi$, where π ranges over the irreducible unitary representations, in a sense to be made precise.
Mathematics Subject Classification 2000 : 22D10, 22D12, 22E46.
Key Words and Phrases : Unitary representation, matrix coefficients, K-types.

1. Introduction

Un groupe topologique G a la propriété (T) de Kazhdan si sa représentation triviale est isolée dans son dual unitaire, $\widehat{G}$. En 1967, Kazhdan a introduit cette propriété pour étudier la structure des réseaux dans les groupes de Lie réels. Il démontre que tout réseau d'un groupe de Lie réel G qui a la propriété (T), est de type fini [10]. Plus tard, en 1981, Akemann et Walter on donné une caractérisation C^*-algébrique de la propriété (T) [1, Lemma 2]. Ils démontrent qu'un groupe topologique localement compact G a la propriété (T) si et seulement s'il existe un idempotent p dans la C^*-algèbre maximale $C^*(G)$ de G tel que pour toute représentation (π, H) unitaire de G, $\pi(p)$ soit la projection orthogonale sur le sous-espace de H formé des vecteurs G-invariants (voir aussi [17, Proposition 2]). Dans cet article, on va définir une propriété (T) tordue en considérant des produits tensoriels de représentations unitaires par des représentations irréductibles non unitaires de dimension finie. Pour ceci, on va définir, pour toute représentation

ISSN 0949–5932 / \$2.50

irréductible de dimension finie d'un groupe topologique, un analogue *tordu* de la C^*-algèbre maximale de G, que l'on va noter $\mathcal{A}_G$, et on va définir une propriété (T) *tordue* en termes de celle-ci.

Définition 1.1. Soient G un groupe localement compact et (ρ, V) une représentation irréductible de dimension finie de G. Soit $C_c(G)$ l'espace vectoriel des fonctions continues à support compact sur G et soit $\mathcal{A}_G$ la complétion de $C_c(G)$ pour la norme $\|.\|_{\mathcal{A}_G}$ donnée par :

$$\|f\|_{\mathcal{A}_G} = \sup_{(\pi, H_\pi)} \|(\rho \otimes \pi)(f)\|_{\mathcal{L}(V \otimes H_\pi)},$$

pour $f \in C_c(G)$ et où (π, H_π) est une représentation unitaire de G.
On dira que G a la propriété (T) *tordue par* ρ s'il existe un idempotent p_G dans $\mathcal{A}_G$ tel que : $\rho(p_G) = \mathrm{Id}_V$ et, pour toute π représentation unitaire de G qui ne contient pas la représentation triviale, $(\rho \otimes \pi)(p_G) = 0$.

Si un groupe G a la propriété (T) tordue par ρ, on dira alors que ρ est *isolée parmi les représentation de la forme* $\rho \otimes \pi$, où π est une représentation unitaire irréductible de G, terminologie que l'on justifiera (voir la proposition 2.5).

De plus, pour toute représentation irréductible de dimension finie ρ on va définir, de la même façon, un analogue *tordu* de $C_r^*(G)$, la C^*-algèbre réduite de G, que l'on notera $\mathcal{A}_G^r$, et on démontrera que si G a la propriété (T) tordue par ρ, alors les algèbres $\mathcal{A}_G$ et $\mathcal{A}_G^r$ n'ont pas la même K-théorie, l'intérêt pour nous étant de calculer la K-théorie de ces algèbres.
On démontre aussi que la propriété (T) tordue par une représentation ρ est héritée par tout réseau cocompact du groupe : Si G a (T) tordue par ρ et Γ est un réseau cocompact de G, alors Γ a la propriété (T) tordue par $\rho|_\Gamma$.
On ne sait pas encore si tout groupe localement compact ayant la propriété (T) a aussi la propriété (T) tordue par toute représentation irréductible de dimension finie, mais la dernière partie de l'article est consacrée à la démonstration du fait que, au moins, beaucoup de groupes de Lie ayant la propriété (T) ont aussi la propriété (T) tordue par n'importe quelle représentation irréductible de dimension finie. On sait que tout groupe de Lie G réel simple connexe de centre fini de rang réel ≥ 2 ou localement isomorphe à $Sp(n,1)$ pour $n \geq 2$ ou à $F_{4(-20)}$, a la propriété (T) [9]. Plus fort encore, il vérifie une décroissance uniforme des coefficients de matrice des représentations unitaires de G qui n'ont pas de vecteurs invariants non nuls [4]. On utilise cette propriété donnée par le théorème 3.6, pour montrer le résultat suivant :

Théorème 1.2. *Soit G un groupe de Lie réel algébrique semi-simple de centre fini, connexe et simplement connexe (au sens algébrique), et tel que chaque facteur simple de G est ou bien de rang réel supérieur ou égal à 2, ou bien localement isomorphe à $Sp(n,1)$ pour $n \geq 2$ ou à $F_{4(-20)}$, et soit ρ une représentation irréductible de dimension finie de G. Alors G a la propriété (T) tordue par ρ.*

Le cas où $G = SL_m(\mathbb{R})$ et $m \geq 3$ a été présenté par l'auteur lors de l'école d'été intitulée "Topological and Geometric Methods for Quantum Field Theory" pendant l'été 2005 à Villa de Leyva en Colombie et va être publié dans les comptes-rendus de celle-ci [7].

David Fisher et Theron Hitchman définissent dans [6] une propriété, qu'ils appellent $F \otimes H$, en termes de 1-cohomologie, qui ressemble à la propriété (T) tordue par ρ ; on ne connaît pas d'implication entre les deux propriétés.

Remerciements. Je voudrais remercier Vincent Lafforgue pour ses nombreuses suggestions et sa grande disponibilité et Bachir Bekka pour ses éclaircissements dans le cas des groupes de rang 1.

2. Propriété (T) tordue

Définitions et terminologie. On rappelle la définition de propriété (T) *tordue* énoncée dans l'introduction :

Définition 2.1. Soient G un groupe localement compact et (ρ, V) une représentation irréductible de dimension finie de G, où V est un espace vectoriel complexe muni d'une norme hermitienne. Soit $C_c(G)$ l'espace vectoriel des fonctions continues à support compact sur G et soit $\mathcal{A}_G$ la complétion de $C_c(G)$ pour la norme $\|.\|_{\mathcal{A}_G}$ donnée par :

$$\|f\|_{\mathcal{A}_G} = \sup_{(\pi, H_\pi)} \|(\rho \otimes \pi)(f)\|_{\mathcal{L}(V \otimes H_\pi)},$$

pour $f \in C_c(G)$, où (π, H_π) varie parmi les représentations unitaires de G.
On note 1_G la représentation triviale de G et on dit que G a la propriété (T) tordue par ρ s'il existe un idempotent p_G dans $\mathcal{A}_G$ tel que :
$\rho(p_G) = \mathrm{Id}_V$ et, pour toute π représentation unitaire de G qui ne contient pas 1_G, $(\rho \otimes \pi)(p_G) = 0$.

Remarque 2.2. L'algèbre $\mathcal{A}_G$ est une algèbre de Banach involutive et toute représentation du groupe G de la forme $\rho \otimes \pi$ avec π unitaire peut être prolongée, de façon évidente, en une représentation de $\mathcal{A}_G$ que l'on note aussi, par abus de notation, $\rho \otimes \pi$.

Remarque 2.3. Si G a la propriété (T) tordue par (ρ, V), alors, pour toute (π, H) représentation unitaire de G, $(\rho \otimes \pi)(p_G)$ est la projection de $V \otimes H$ sur $V \otimes H^G$ parallèlement à $V \otimes (H^G)^\perp$, où H^G est le sous-espace de H formé des vecteurs G-invariants. En effet, il suffit d'écrire π de la forme $\pi_0 \oplus \pi_1$, où π_1 est la sous-représentation de π sur $(H^G)^\perp$ qui ne contient pas la représentation triviale et π_0 est la sous-représentation de π qui a pour espace H^G et qui est équivalente à 1_G.

Définition 2.4. Soit G un groupe localement compact, $\widehat{G}$ son dual unitaire et (ρ, V) une représentation irréductible de G. On définit une nouvelle topologie sur $\widehat{G}$, que l'on appelle *tordue par* ρ, de la manière suivante : Si P est un sous-ensemble de $\widehat{G}$ et $\pi \in \widehat{G}$ alors π est dans l'adhérence tordue par ρ de P, si $\rho \otimes \pi$ est contenu dans l'adhérence de Fell de $\rho \otimes P := \{\rho \otimes \pi' | \pi' \in P\}$ dans le dual de $\mathcal{A}_G$ (voir [5] Chapitre VII).
On note $\widehat{G}^\rho$ l'espace $\widehat{G}$ muni de cette topologie.

Proposition 2.5. *Soit G un groupe topologique localement compact et ρ une représentation irréductible de dimension finie de G. Si G a la propriété (T) tordue par ρ alors la représentation triviale de G est isolée dans $\widehat{G}^\rho$.*

Démonstration. Supposons que G a la propriété (T) tordue par ρ et soit p_G l'idempotent dans $\mathcal{A}_G$ qui vérifie les propriétés données par la définition 2.1. Supposons que ρ soit contenue dans l'adhérence de Fell de l'ensemble $\{\rho\otimes\pi|\pi \text{ est une représentation unitaire}\}$ dans le dual de $\mathcal{A}_G$. On a alors

$$\bigcap_{1_G\not\subseteq\pi} \mathrm{Ker}(\rho\otimes\pi)\subset \mathrm{Ker}(\rho),$$

(voir par exemple [5, Chapitre VII Proposition 3.11]).
Or, $p_G\in\bigcap_{1_G\not\subseteq\pi}\mathrm{Ker}(\rho\otimes\pi)$ et $\rho(p_G)\neq 0$, et donc ρ est isolée, pour la topologie de Fell, dans le sous-ensemble du dual de $\mathcal{A}_G$ formé des représentations de la forme $\rho\otimes\pi$, où π est une représentation unitaire de G. Par conséquent, 1_G est isolée dans $\widehat{G}^\rho$. ∎

Cette proposition justifie la terminologie utilisée :
Si un groupe topologique G a la propriété (T) tordue par une représentation irréductible de dimension finie ρ, on dira alors que ρ est *isolée parmi les représentations de la forme* $\rho\otimes\pi$, où π est une représentation unitaire irréductible de G.

Remarque 2.6. Si $\rho=1_G$, alors G a la propriété (T) tordue par 1_G s'il existe un idempotent p_G dans la C^*-algèbre maximale de G, tel que pour toute représentation unitaire π de G, $\pi(p_G)$ soit la projection sur l'espace des vecteurs G-invariants. Dans ce cas, la proposition 2.5 est une équivalence et c'est le résultat connu qui dit qu'un groupe localement compact a la propriété (T) usuelle si et seulement si $C^*(G)$ s'écrit comme une somme directe de C^*-algèbres de la forme :

$$C^*(G)=\mathrm{Ker}(1_G)\oplus I,$$

où I est un idéal bilatère fermé de $C^*(G)$ [1], [17].

L'objectif principal de cet article est de prouver que beaucoup de groupes de Lie qui ont la propriété (T), vérifient aussi la propriété (T) tordue par n'importe quelle représentation irréductible de dimension finie.
En s'inspirant de la remarque précédente, pour tout groupe topologique localement compact G et toute représentation irréductible de dimension finie ρ de G, on considère l'espace vectoriel $C_c(G)$ formé des fonctions continues à support compact sur G et on définit deux nouvelles complétions de celui-ci de la manière suivante :

Soit $\mathcal{A}'_G$ la complétion de $C_c(G)$ par rapport à la norme $\|.\|_{\mathcal{A}'_G}$ donnée par :

$$\|f\|_{\mathcal{A}'_G}=\sup_{(\pi,H_\pi)}\|(\rho\otimes\pi)(f)\|_{\mathcal{L}(V\otimes H_\pi)},$$

pour $f\in C_c(G)$, où (π,H_π) varie parmi les représentations unitaires de G qui ne contiennent pas la représentation triviale.
Et soit $\mathcal{A}''_G$ la complétion de $C_c(G)$ pour la norme $\|.\|_{\mathcal{A}''_G}$ donnée par :

$$\|f\|_{\mathcal{A}''_G}=\|\rho(f)\|_{\mathrm{End}(V)},$$

pour tout $f \in C_c(G)$.
On remarque alors qu'on a deux morphismes d'algèbres de Banach :

$$\Theta_1 : \mathcal{A}_G \to \mathcal{A}'_G \text{ and } \Theta_2 : \mathcal{A}_G \to \mathcal{A}''_G \ .$$

Soit $\Theta : \mathcal{A}_G \to \mathcal{A}'_G \oplus \mathcal{A}''_G$ le prolongement à $\mathcal{A}_G$ du morphisme donné sur $C_c(G)$ par : $\Theta(f) = (\Theta_1(f), \Theta_2(f))$. C'est un morphisme d'algèbres de Banach.

On a alors l'équivalence évidente suivante :

Proposition 2.7. *Le groupe G a la propriété (T) tordue par ρ si et seulement si le morphisme d'algèbres de Banach Θ est un isomorphisme.*

Relation avec la K-théorie Soient G un groupe topologique et (ρ, V) une représentation irréductible de dimension finie de G. De la même façon que l'on a défini l'algèbre $\mathcal{A}_G$, qui est l'analogue *tordu par* ρ de la C^*-algèbre maximale de G, on peut définir une algèbre de Banach *réduite tordue par* ρ de G comme étant la complétion de $C_c(G)$ pour la norme :

$$\|f\|_{\mathcal{A}^r_G} = \|\rho \otimes L_G(f)\|_{\mathcal{L}(V \otimes \mathrm{L}^2(G))},$$

pour $f \in C_c(G)$ et où L_G est la représentation régulière gauche de G dans $\mathrm{L}^2(G)$.
On note $\mathcal{A}^r_G$ cette complétion.
On a alors un unique morphisme d'algèbres de Banach prolongeant l'identité sur $C_c(G)$:

$$\rho \otimes L_G : \mathcal{A}_G \to \mathcal{A}^r_G,$$

qui définit un morphisme en K-théorie

$$(\rho \otimes L_G)^* : \mathrm{K}(\mathcal{A}_G) \to \mathrm{K}(\mathcal{A}^r_G).$$

Proposition 2.8. *Si G a la propriété (T) tordue par ρ et G n'est pas un groupe compact alors les algèbres $\mathcal{A}_G$ et $\mathcal{A}^r_G$ n'ont pas la même K-théorie, c'est-à-dire que $(\rho \otimes L_G)^*$ n'est pas un isomorphisme.*

Démonstration. Supposons que G soit un groupe localement compact non-compact ayant la propriété (T) tordue par une représentation ρ. Il existe alors un idempotent non-nul $p_G \in \mathcal{A}_G$ tel que $\rho(p_G) = \mathrm{Id}_V$ et, pour toute représentation π unitaire de G qui ne contient pas la représentation triviale , $(\rho \otimes \pi)(p_G) = 0$. Comme G n'est pas compact on peut prendre $\pi = L_G$ et, par conséquent, $(\rho \otimes L_G)(p_G) = 0$, ce qui montre que $(\rho \otimes L_G)^*$ n'est pas un morphisme injectif. ∎

Propriété d'hérédité On va démontrer que la propriété (T) tordue par une représentation irréductible de dimension finie est héritée par les réseaux cocompacts du groupe. Pour qu'un énoncé de ce style ait un sens, on a d'abord besoin du lemme suivant :

Lemme 2.9. *Si Γ est un réseau cocompact d'un groupe topologique localement compact G ayant la propriété (T) tordue par une représentation irréductible de dimension finie (ρ, V), alors $\rho|_\Gamma$ est une représentation irréductible de Γ.*

Démonstration. Soit $\mathrm{Hom}_\Gamma(V|_\Gamma, V|_\Gamma)$ l'ensemble des morphismes Γ-invariants de $V|_\Gamma$ dans $V|_\Gamma$. On a un morphisme injectif de $\mathrm{Hom}_\Gamma(V|_\Gamma, V|_\Gamma)$ dans $\mathrm{Hom}_G(V, V \otimes \mathrm{L}^2(G/\Gamma))$, où $L^2(G/\Gamma)$ est l'espace de la représentation régulière quasi-invariante de G. En effet, soit $T \in \mathrm{Hom}_\Gamma(V|_\Gamma, V|_\Gamma)$ et F_T la fonction continue sur G à valeurs dans $\mathrm{End}(V)$ telle que $F_T(g) = \rho(g)T\rho(g)^{-1}$, pour tout $g \in G$. Comme T est Γ-équivariant, F_T est une fonction continue (qui est en plus G-équivariante) sur G/Γ à valeurs dans $\mathrm{End}(V)$. Comme G/Γ est compact, F_T appartient à $\mathrm{L}^2(G/\Gamma, \mathrm{End}(V))$.
Soit

$$F(T) : V \to \mathrm{L}^2(G/\Gamma, V),$$

tel que $F(T)(v)(x) = F_T(x)v$, pour tout $v \in V$ et tout $x \in G/\Gamma$. C'est une application linéaire continue G-équivariante, donc $F(T) \in \mathrm{Hom}_G(V, \mathrm{L}^2(G/\Gamma, V)) = \mathrm{Hom}_G(V, \mathrm{L}^2(G/\Gamma) \otimes V)$.
De plus, si $1 \in G$ est l'identité de G, alors $F_T(1) = T$ et donc, la correspondance $T \mapsto F(T)$ définit un morphisme injectif de $\mathrm{Hom}_\Gamma(V|_\Gamma, V|_\Gamma)$ dans $\mathrm{Hom}_G(V, V \otimes \mathrm{L}^2(G/\Gamma))$.
Ceci implique que,

$$\dim_{\mathbb{C}}(\mathrm{Hom}_\Gamma(V|_\Gamma, V|_\Gamma)) \leq \dim_{\mathbb{C}}(\mathrm{Hom}_G(V, V \otimes \mathrm{L}^2(G/\Gamma))).$$

Mais le fait que le groupe G ait la propriété (T) tordue par ρ implique que

$$\mathrm{Hom}_G(V, V \otimes \mathrm{L}^2(G/\Gamma)) = \mathrm{Hom}_G(V, V),$$

car, en effet, on peut écrire

$$\mathrm{L}^2(G/\Gamma) = \mathrm{L}^2(G/\Gamma)_0 \oplus \mathrm{L}^2(G/\Gamma)_1,$$

où $\mathrm{L}^2(G/\Gamma)_0$ est la sous-représentation triviale de $L^2(G/\Gamma)$ engendrée par la fonction constante égale à 1 et $\mathrm{L}^2(G/\Gamma)_1$ est son orthogonal, qui ne contient pas 1_G. Si en plus G a (T) tordue par ρ,

$$\mathrm{Hom}_G(V, V \otimes \mathrm{L}^2(G/\Gamma)_1) = 0,$$

d'où,

$$\begin{aligned}\mathrm{Hom}_G(V, V \otimes \mathrm{L}^2(G/\Gamma)) &= \mathrm{Hom}_G(V, V) \\ &= \mathbb{C}.\mathrm{Id}_V,\end{aligned}$$

car V est une représentation irréductible de G, d'où le lemme.

■

Proposition 2.10. *Soit G un groupe localement compact et Γ un réseau cocompact de G. Soit ρ une représentation irréductible de dimension finie de G. Si G a la propriété (T) tordue par ρ alors Γ a la propriété (T) tordue par $\rho|_\Gamma$.*

Démonstration. Supposons que G a la propriété (T) tordue par ρ et soit Γ un réseau cocompact de G. L'existence de Γ implique que G est unimodulaire. Soit dg une mesure de Haar sur G telle que G/Γ soit de mesure 1. Par abus de notation, on notera de la même façon la représentation ρ de G et sa restriction à Γ. On rappelle que l'on note $\mathcal{A}_G$ (resp. $\mathcal{A}_\Gamma$) la complétion de $C_c(G)$ (resp. $C_c(\Gamma)$) pour la norme donnée, pour $f \in C_c(G)$ (resp. $f \in C_c(\Gamma)$), par :

$$\|f\| = \sup_{(\pi,H_\pi)} \|(\rho\otimes\pi)(f)\|_{\mathcal{L}(V\otimes H_\pi)},$$

où le supremum est pris parmi les représentations unitaires de G (resp. de Γ).
Si (π, H) est une représentation de G (resp. de Γ) on note H^G (resp. H^Γ) le sous-espace de H formé des vecteurs invariants.
Soit p_G l'idempotent de $\mathcal{A}_G$ tel que pour toute (π, H_π) représentation unitaire de G, $(\rho\otimes\pi)(p_G)$ est la projection de $V\otimes H_\pi$ sur $V\otimes H_\pi^G$.
Supposons qu'il existe une fonction $f \in C_c(G)$ telle que

$$\sum_{\gamma\in\Gamma} f(g\gamma)\rho(\gamma) = \rho(g^{-1}), \tag{1}$$

pour tout $g \in G$ (ce qui implique que $\int_G f(g)\rho(g)dg = \mathrm{Id}_V$).

On veut construire un idempotent $p_\Gamma \in \mathcal{A}_\Gamma$, tel que pour toute représentation (π, H) unitaire de Γ, $(\rho\otimes\pi)(p_\Gamma)$ soit la projection de $V\otimes H$ sur $V\otimes H^\Gamma$. Soit une suite $(p_G^n)_n$ dans $C_c(G)$ qui converge vers p_G dans $\mathcal{A}_G$, soit (π, H) une représentation unitaire de Γ et soit $(\mathrm{Ind}(\pi), \mathrm{Ind}(H))$ la représentation unitaire de G obtenue par induction unitaire de π. On note $\pi' := \mathrm{Ind}(\pi)$ et $H' := \mathrm{Ind}(H)$ pour simplifier les notations et on remarque que $V\otimes H'$ est le complété de l'ensemble des fonction continues $s : G \to V\otimes H$ telles que $s(g\gamma) = (\mathrm{Id}_{\mathrm{End}(V)}\otimes\pi')(\gamma^{-1})s(g)$, pour $\gamma\in\Gamma$ et pour une norme L^2 sur G/Γ.
Soient α et β les application linéaires continues suivantes :

$$\begin{aligned}
&\alpha : V\otimes H \to V\otimes H'\\
&\qquad v\otimes\xi \mapsto (g \mapsto \sum_{\gamma\in\Gamma} \rho(g\gamma)v\otimes f(g\gamma)\pi(\gamma)\xi),\\
&\beta : V\otimes H' \to V\otimes H\\
&\qquad v\otimes s \mapsto \int_G \rho(g^{-1})v\otimes f(g^{-1})s(g)dg.
\end{aligned}$$

On vérifie facilement que $\beta\circ\alpha = \mathrm{Id}_{V\otimes H}$ et on a, pour tout $v\in V$ et tout $\xi\in H$,

$$\beta\circ(\rho\otimes\pi')(p_G^n)\circ\alpha(v\otimes\xi) = \\
\sum_{\gamma\in\Gamma}\int_{G\times G} p_G^n(g)f(x^{-1}g^{-1})f(x\gamma)(\rho\otimes\pi)(\gamma)(v\otimes\xi)dxdg.$$

Posons, pour $\gamma \in \Gamma$ et $n \in \mathbb{N}$,

$$p_\Gamma^n(\gamma) = \int_{G\times G} p_G^n(g) f(x^{-1}g^{-1}) f(x\gamma) dx dg.$$

La suite $(p_\Gamma^n)_n$ appartient à $C_c(\Gamma)$ et elle converge dans $\mathcal{A}_\Gamma$ car :

$$\|p_\Gamma^n\|_{\mathcal{A}_\Gamma} = \sup_{(\pi,H)} \|\beta \circ (\rho \otimes \pi')(p_G^n) \circ \alpha\|_{\mathcal{L}(V\otimes H)},$$

où le supremum est pris parmi les représentations π unitaires de Γ et π' est la représentation de G induite de π.
Donc,

$$\|p_\Gamma^n\|_{\mathcal{A}_\Gamma} \leq \sup_{(\pi,H)} \max(\|\beta \circ \rho(p_G^n) \circ \alpha\|_{\mathrm{End}(V)}, \|\beta \circ (\rho \otimes \pi_1')(p_G^n) \circ \alpha\|_{\mathcal{L}(V\otimes H_1')}),$$

où on a écrit $\pi' = \pi_0' \oplus \pi_1'$ avec π_0' équivalente à 1_G et π_1' ne contenant pas 1_G. Mais $\lim_{n\to\infty} \beta \circ \rho(p_G^n) \circ \alpha = \mathrm{Id}_V$ et $\lim_{n\to\infty} \beta \circ (\rho \otimes \pi_1')(p_G^n) \circ \alpha = 0$, donc la suite $(p_\Gamma^n)_n$ est une suite de Cauchy pour la norme $\|\|_{\mathcal{A}_\Gamma}$.

Soit p_Γ sa limite dans $\in \mathcal{A}_\Gamma$.
On a alors l'égalité :

$$(\rho \otimes \pi)(p_\Gamma) = \beta \circ (\rho \otimes \pi')(p_G) \circ \alpha.$$

D'autre part, le fait d'avoir une fonction f dans $C_c(G)$ qui vérifie $\sum_{\gamma\in\Gamma} f(g\gamma)\rho(\gamma) = \rho(g^{-1})$ implique que $\alpha(V \otimes H^\Gamma) \subset V \otimes (H')^G$ et que $\beta(V \otimes (H')^G) \subset V \otimes H^\Gamma$. Comme de plus $\beta \circ \alpha = \mathrm{Id}_{V\otimes H}$, alors $(\rho \otimes \pi)(p_\gamma)$ est bien la projection de $V \otimes H$ sur le sous-espace $V \otimes H^\Gamma$.

Montrons maintenant qu'il existe une fonction f à support compact sur G et vérifiant l'équation (1).
Soit $p : G \to G/\Gamma$ la projection canonique. On doit montrer qu'il existe une fonction f continue à support compact telle que, pour tout $x \in G/\Gamma$,

$$\sum_{g\in p^{-1}(x)} f(g)\rho(g) = \mathrm{Id}_V.$$

Soit $(U_i)_{i=1,\dots,q}$ un recouvrement ouvert de G/Γ (que l'on peut prendre fini car G/Γ est compact) tel que $p^{-1}(U_i)$ soit homéomorphe à $U_i \times \Gamma$ et soient, pour tout $i = 1, ..., q$, $s_i : p^{-1}(U_i) \to U_i \times \Gamma$ les homéomorphismes correspondants. Comme ρ est une représentation irréductible de Γ, l'ensemble des $\rho(\gamma)$ avec γ parcourant Γ, engendre $\mathrm{End}(V)$ (théorème de Burnside [13, Chapter XVII, Corollary 3.3]) ; si m est la dimension de V, on peut trouver un sous-ensemble Δ de Γ de cardinal m^2 tel que l'ensemble $\{\rho(\gamma)|\gamma \in \Delta\}$ forme une base de $\mathrm{End}(V)$. Il est clair alors que pour tout $i = 1, ..., q$, il existe une fonction continue à support compact $f_i : U_i \times \Gamma \to \mathbb{C}$ telle que

$$\sum_{\gamma\in\Delta} f_i(u,\gamma)\rho(\gamma) = \rho(u^{-1}),$$

pour tout $u \in U_i$.
Pour tout $i = 1, ..., q$, soit $\tilde{f}_i = f_i \circ s_i$ et soit $(\delta_i)_{i=1,...,q}$ une partition de l'unité associée à $(U_i)_{i=1,...,q}$.
On pose pour tout $g \in G$,

$$f(g) = \sum_{i=1}^{q} (\delta_i \circ p)(g)\tilde{f}_i(g).$$

Comme $\tilde{f}_i$ appartient à $C_c(p^{-1}(U_i))$ pour tout i, alors $(\delta_i \circ p)\tilde{f}_i$ est aussi à support compact sur $p^{-1}(U_i)$ et la fonction f ainsi définie est à support compact sur G et vérifie l'équation (1).

■

3. Cas des groupes de Lie semi-simples

Tout au long de cette section G sera un groupe de Lie réel connexe semi-simple de centre fini. On ne considère que le cas où G est algébrique et simplement connexe (c'est-à-dire que tout revêtement algébrique de G est isomorphe à G) de façon à ce que G soit produit direct de ses facteurs simples [14, Proposition I.1.4.10]. On suppose en plus que tout facteur direct simple de G est soit de rang au moins 2, soit localement isomorphe à $Sp(n, 1)$ pour $n \geq 2$ ou à $F_{4(-20)}$. Le groupe G a alors la propriété (T) de Kazhdan usuelle (c'est-à-dire que 1_G est isolée dans le dual unitaire de G) [9] et vérifie, en fait, une propriété plus forte de décroissance uniforme de coefficients de matrice de représentations unitaires [4].
Soit $\rho : G \to \mathrm{Aut(V)}$ une représentation irréductible de dimension finie de G dans un espace vectoriel complexe V de dimension m. On considère le complexifié $G(\mathbb{C})$ de G et le complexifié de l'algèbre de Lie de G, $\mathfrak{g}$, que l'on note $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$. On notera de la même façon la représentation de $\mathfrak{g}$ définie par ρ sur V et ρ elle même. Soit $\mathfrak{u}$ une forme réelle compacte de $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ compatible avec $\mathfrak{g}$ et soit U le sous-groupe de Lie connexe de $G(\mathbb{C})$ qui a pour algèbre de Lie $\mathfrak{u}$. Le groupe U est un sous-groupe compact maximal de $G(\mathbb{C})$ qui est invariant par la conjugaison complexe sur $G(\mathbb{C})$ [12]. Soit K le sous-groupe compact maximal de G donné par $U \cap G$. On considère sur V un produit hermitien invariant par l'action de U (unique à constante près car V est irréductible), c'est-à-dire tel que $\rho_{\mathbb{C}}(U)$ soit contenu dans les matrices unitaires de $\mathrm{GL}(V)$, où $\rho_{\mathbb{C}}$ est le complexifié de ρ. Pour un élément $M \in \mathrm{End}(V)$, notons M^* son adjoint par rapport à ce produit hermitien.

On considère toujours la norme d'opérateur sur $\mathrm{End}(V)$ que l'on notera $\|.\|_{\mathrm{End}(V)}$ et une mesure de Haar sur G, dg pour $g \in G$.
Soit $\omega : G \to \mathrm{Aut}(V')$ une représentation fidèle de G qui contient ρ et telle que V' soit muni d'un produit hermitien de sorte que $\omega_{\mathbb{C}}(U)$ soit contenu dans le groupe unitaire de $\mathrm{GL}(V')$. On définit une longueur l sur G (c'est-à-dire une fonction sur G à valeurs dans $\mathbb{R}^+$ telle que $l(1) = 0$, $l(gh) \leq l(g) + l(h)$ et $l(g) = l(g^{-1})$, $\forall g, h \in G$) de la façon suivante :

$$l(g) = \log(\max(\|\omega(g)\|_{\mathrm{End}(V)}, \|\omega(g^{-1})\|_{\mathrm{End}(V)})), \forall g \in G.$$

Cette longueur définit une semi-métrique d sur G donnée par $d(g, x) = l(g^{-1}x)$, pour $g, x \in G$. Soit $B_q = \{g \in G | l(g) \leq q\}$ pour tout $q \in \mathbb{N}$.

Le but de cette section est de démontrer que le groupe G a la propriété (T) tordue par ρ.

Soient $\mathcal{A}_G$, $\mathcal{A}'_G$ et $\mathcal{A}''_G$ définies comme dans la section précédente et soit Θ le morphisme d'algèbres de Banach

$$\Theta : \mathcal{A}_G \to \mathcal{A}'_G \oplus \mathcal{A}''_G.$$

Théorème 3.1. *Le morphisme d'algèbres de Banach Θ est un isomorphisme.*

Remarque 3.2. Si on munit $\mathcal{A}' \oplus \mathcal{A}''$ de la norme donnée par : $\|(x,y)\| = \max(\|x\|_{\mathcal{A}'}, \|y\|_{\mathcal{A}''})$ pour $x \in \mathcal{A}'$, $y \in \mathcal{A}''$, alors Θ est un morphisme d'algèbres de Banach isométrique et donc pour prouver le théorème il suffit de démontrer que l'image est dense. En effet, toute représentation unitaire de G, (π, H_π), peut s'écrire comme somme directe de deux sous-représentations : la partie de π qui ne contient pas de vecteurs invariants non nuls (et donc qui ne contient pas 1_G) que l'on va noter π_1, et la partie de π qui est multiple de 1_G, notée π_0. Alors, pour tout $f \in C_c(G)$,

$$\begin{aligned}\|f\|_{\mathcal{A}} &= \sup_{\pi}(\max(\|(\rho\otimes\pi_1)(f)\|_{\mathcal{L}(V\otimes H_{\pi_1})}, \|\rho\otimes\pi_0(f)\|_{\mathcal{L}(V\otimes H_{\pi_0})}))\\ &= \max(\sup_{\pi\not\supseteq 1_G}\|(\rho\otimes\pi)(f)\|_{\mathcal{L}(V\otimes H)}, \|\rho(f)\|_{\mathrm{End}(V)})\\ &= \|\Theta(f)\|_{\mathcal{A}'\oplus\mathcal{A}''}.\end{aligned}$$

Remarque 3.3. On remarque aussi que ρ définit une représentation irréductible et fidèle, car isométrique, de $\mathcal{A}''$ dans $\mathrm{End}(V)$. On a alors que $\mathcal{A}'' = \mathrm{End}(V)$ (théorème de Burnside cf. [13, Chapter XVII, Corollary 3.3]).

On a le lemme suivant :

Lemme 3.4. *Il existe une matrice E non nulle dans* $\mathrm{End}(V)$ *et il existe une suite de fonctions continues à support compact sur G, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que, $\lim_{n\to\infty}\rho(f_n) = E$ et $\lim_{n\to\infty}\sup_{\pi}\|(\rho\otimes\pi)(f_n)\|_{\mathcal{L}(V\otimes H_\pi)} = 0$, où le supremum est pris parmi les représentations unitaires de G qui ne contiennent pas la représentation triviale.*

Montrons d'abord que le lemme 3.4 implique le Théorème 3.1.
Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite donnée par le lemme 3.4 et $E \in \mathrm{End}(V)$ non nulle telle que $\lim_{n\to\infty}\rho(f_n) = E$. La suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge dans $\mathcal{A}$ car

$$\|f_n\|_{\mathcal{A}} = \max(\|\rho(f_n)\|_{\mathrm{End}(V)}, \sup_{\pi\not\supseteq 1_G}\|(\rho\otimes\pi)(f_n)\|_{\mathcal{L}(V\otimes H_\pi)}),$$

et comme $\lim_{n\to\infty}\sup_{\pi\not\supseteq 1_G}\|(\rho\otimes\pi)(f_n)\|_{\mathcal{L}(V\otimes H_\pi)} = 0$, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy pour $\|.\|_{\mathcal{A}}$ et donc elle converge dans $\mathcal{A}$. Soit p la limite de f_n quand n tend vers l'infini. On a que $\rho(p) = E$ et pour toute représentation unitaire π de G, qui n'a pas de vecteurs invariants non nuls, $(\rho\otimes\pi)(p) = 0$, donc $\Theta(p) = (0, E)$. Soit $\mathcal{S}$ l'idéal bilatère engendré par p dans $\mathcal{A}$ et Q l'idéal bilatère engendré par E dans $\mathrm{End}(V)$. Comme ρ définit un morphisme surjectif de $\mathcal{A}$ vers $\mathrm{End}(V)$ (cf.

Remarque 3.3), on a que $\Theta(\mathcal{S})$ contient $0 \oplus Q$. Or, tout idéal bilatère non nul de $\mathrm{End}(V)$ est égal à $\mathrm{End}(V)$ tout entier. On a donc que $0 \oplus \mathrm{End}(V) = 0 \oplus \mathcal{A}''$ est contenu dans $\Theta(\mathcal{S})$ et donc dans $\Theta(\mathcal{A})$. Ceci montre alors que $\Theta(\mathcal{A}) = \mathcal{A}' \oplus \mathcal{A}''$, car $\mathcal{A} \to \mathcal{A}'$ est d'image dense, et donc que Θ est un isomorphisme en tenant compte de la remarque 3.2.

Démonstration. On va maintenant montrer le lemme 3.4. On remarque d'abord le lemme suivant :

Lemme 3.5. *Soit f une fonction à support compact sur G et (π, H_π) une représentation unitaire de G. On a l'inégalité suivante :*

$$\|(\rho \otimes \pi)(f)\|_{\mathcal{L}(V \otimes H_\pi)} \leq \sup_{\xi,\eta \in H_\pi} m^2 \int_G |f(g)| \|\rho(g)\|_{\mathrm{End}(V)} |\langle \pi(g)\xi, \eta\rangle| dg, \qquad (2)$$

où le supremum est pris parmi les vecteurs unitaires ξ, η de H_π.

Démonstration. Soit $\{v_i\}_{i=1,..,m}$ une base orthonormale de V. On a alors les inégalités suivantes :

$$\begin{aligned}
\|(\rho \otimes \pi)(f)\|_{\mathcal{L}(V \otimes H_\pi)} &\leq \sup_{\substack{x,y \in V \otimes H_\pi \\ \|x\|=\|y\|=1}} |\langle \int_G f(g)(\rho \otimes \pi)(g) dg x, y\rangle| \\
&\leq \sup_{\xi_j,\eta_k \in H_\pi} |\Big\langle \Big(\int_G f(g)\rho(g) \otimes \pi(g) dg\Big)(\sum_{j=1}^m v_j \otimes \xi_j), (\sum_{k=1}^m v_k \otimes \eta_k)\Big\rangle| \\
&\leq \sup_{\xi_j,\eta_k \in H_\pi} \int_G |f(g)| \sum_{j,k=1}^m |\langle \rho(g)v_j, v_k\rangle| |\langle \pi(g)\xi_j, \eta_k\rangle| dg \\
&\leq \sup_{\xi_j,\eta_k \in H_\pi} \int_G |f(g)| \|\rho(g)\|_{\mathrm{End}(V)} \sum_{j,k=1}^m |\langle \pi(g)\xi_j, \eta_k\rangle| dg,
\end{aligned}$$

où les supremums sont pris parmi des vecteurs $\xi_j, \eta_k \in H_\pi$, pour $j,k \in \{1,...,m\}$, tels que $\sum_{j=1}^m \|\xi_j\|^2 = 1$ et $\sum_{k=1}^m \|\eta_k\|^2 = 1$.
Or, pour tous $\xi_j, \eta_k \in H_\pi$ avec $j,k \in \{1,..,m\}$ tels que $\sum_{j=1}^m \|\xi_j\|^2 = 1$ et $\sum_{k=1}^m \|\eta_k\|^2 = 1$, si on pose $\xi' := \frac{\xi_j}{\|\xi_j\|}$ et $\eta' := \frac{\eta_k}{\|\eta_k\|}$,

$$\begin{aligned}
\int_G |f(g)| \|\rho(g)\|_{\mathrm{End}(V)} \sum_{j,k=1}^{m} |\langle \pi(g)\xi_j, \eta_k\rangle| dg \\
&= \int_G |f(g)| \|\rho(g)\|_{\mathrm{End}(V)} \sum_{j,k=1}^{m} \|\xi_j\| \|\eta_k\| |\langle \pi(g)\xi', \eta'\rangle| dg \\
&\leq \sum_{j,k=1}^{m} \|\xi_j\| \|\eta_k\| \sup_{\substack{\xi,\eta \in H_\pi \\ \|\xi\|=\|\eta\|=1}} \int_G |f(g)| \|\rho(g)\|_{\mathrm{End}(V)} |\langle \pi(g)\xi, \eta\rangle| dg \\
&\leq m^2 \sup_{\substack{\xi,\eta \in H_\pi \\ \|\xi\|=\|\eta\|=1}} \int_G |f(g)| \|\rho(g)\|_{\mathrm{End}(V)} |\langle \pi(g)\xi, \eta\rangle| dg,
\end{aligned}$$

d'où,

$$\|(\rho \otimes \pi)(f)\|_{\mathcal{L}(V \otimes H_\pi)} \leq m^2 \sup_{\substack{\xi,\eta \in H_\pi \\ \|\xi\|=\|\eta\|=1}} \int_G |f(g)| \|\rho(g)\|_{\mathrm{End}(V)} |\langle \pi(g)\xi, \eta\rangle| dg.$$

■

On veut utiliser la décroissance uniforme des coefficients de matrice des représentations unitaires, ne contenant pas la triviale, donnée par le théorème suivant (voir [4, Corollaire 2.4.3 et Théorème 2.5.3], [8, corollaire 2.7 et proposition 6.3], [15, proposition 2.7 et théorème 4.11]) :

Théorème 3.6. *Soit G un groupe de Lie réel semi-simple connexe à centre fini tel que, tout sous-groupe distingué $G_i \neq 1$ soit tel que $\mathrm{rang}_{\mathbb{R}}(G_i) \geq 2$, ou $G_i = Sp(n,1)$ ou $G_i = F_{4(-20)}$ et soit K un sous-groupe compact maximal de G. Alors il existe une fonction continue K-bi-invariante ϕ sur G à valeurs dans $\mathbb{R}^+$ qui tend vers zéro à l'infini et telle que, pour toute représentation unitaire π de G dans un espace de Hilbert H_π, qui ne contient pas de vecteurs invariants non nuls, et pour tous vecteurs unitaires ξ, η dans H_π, on a l'estimation suivante :*

$$\forall g \in G, |\langle \pi(g)\xi, \eta\rangle| \leqslant \phi(g)\delta_K(\xi)\delta_K(\eta)$$

où $\delta_K(v) = (\dim\langle Kv\rangle)^{1/2} \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ et $\langle Kv\rangle$ est le sous-espace de V engendré par l'action de K sur v, pour $v \in H_\pi$.

On note $\widehat{K}$ l'ensemble des classes d'équivalence de représentations irréductibles de K.
On rappelle que toute représentation (μ, H_μ) de K s'écrit comme somme directe de représentations irréductibles. L'espace H_μ s'écrit alors comme une somme directe de la forme :

$$H_\mu = \bigoplus_{[\sigma] \in \widehat{K}} H_\sigma^{\oplus r_\sigma},$$

où $[\sigma]$ est la classe de la représentation (σ, H_σ) dans $\widehat{K}$ et r_σ est sa multiplicité dans la décomposition de μ.
Le sous-espace $H_\sigma^{\oplus r_\sigma}$ de H_μ est alors appelé la composante σ-*typique* de μ.
Si (σ, H_σ) est une représentation irréductible de dimension n_σ, la projection $P_\sigma : H_\mu \to H_\mu$ sur la partie σ-typique de μ est donnée par :

$$P_\sigma = n_\sigma \mu(\chi_{\sigma^*}) \tag{3}$$

où χ_σ est le caractère de σ et $\chi_{\sigma^*}(t) = \overline{\chi_\sigma(t)} = \chi_\sigma(t^{-1})$ est le caractère de sa représentation contragrédiente dans l'espace dual de H_σ (cf. [16, Chapitre 2, Partie I]).

Soit $\mathcal{I} \subset \widehat{K}$ l'ensemble des K-types de V, c'est-à-dire l'ensemble des représentations irréductibles de K qui apparaissent dans la décomposition de $(\rho|_K, V)$ en somme directe de représentations irréductibles.

Pour toute représentation π de G, on note $\mathcal{J}_G(\pi)$ l'ensemble des K-types de π vue comme représentation de G. Avec cette notation $\mathcal{I} = \mathcal{J}_G(\rho)$.
En particulier, si π est une représentation de $G \times G$, on notera $\mathcal{J}_{G\times G}(\pi) \subset \widehat{K} \times \widehat{K}$ l'ensemble des $(K \times K)$-types de π vue comme représentation de $G \times G$.

On considère la représentation régulière $L \times R$ de $G \times G$ sur $C_c(G)$, qui est donnée par la formule :

$$L \times R : G \times G \to \mathcal{L}(C_c(G)),\ (L \times R)(t, t')f(g) = f(t^{-1}gt').$$

Définition 3.7. Soit f une fonction continue à support compact sur G. L'ensemble des K-types à gauche et à droite de f est l'ensemble des classes de représentations irréductibles de $K \times K$ qui apparaissent dans la décomposition de $f \in C_c(G)$ quand on décompose la représentation régulière $L \times R$, restreinte à $K \times K$, en somme directe de représentations irréductibles.

Lemme 3.8. *Il existe une fonction ϕ continue sur G, bi-invariante par K, à valeurs dans $\mathbb{R}^+$, qui tend vers zéro à l'infini et telle que pour toute fonction f continue à support compact sur G ayant des K-types à gauche et à droite contenus dans $\mathcal{J}_{G\times G}(\rho \otimes \rho^*)$ et pour toute représentation unitaire de G, π, sans vecteurs invariants non nuls, on a :*

$$\|(\rho \otimes \pi)(f)\|_{\mathcal{L}(V \otimes H_\pi)} \leq \sup_{\xi, \eta \in H_\pi} m^2 \int_G |f(g)| \|\rho(g)\|_{\mathrm{End}(V)} \phi(g) \delta_K(\xi) \delta_K(\eta) dg,$$

où le sup est pris parmi les vecteurs $\xi, \eta \in H_\pi$ unitaires ayant des K-types appartenant à $\mathcal{J}_G(\rho \otimes \rho^*)$.

Démonstration. On va d'abord montrer que le supremum dans l'inégalité (2) peut être pris parmi les vecteurs unitaires $\xi, \eta \in H_\pi$ ayant des K-types appartenant à $\mathcal{J}_G(\rho \otimes \rho^*)$.
Soit (μ, H_μ) une représentation unitaire de G et f une fonction continue à support

compact sur G. On remarque tout d'abord que pour tout $\xi, \eta \in H_\mu$ et pour toute $\sigma \in \widehat{K}$, la projection du vecteur $\mu(f)\xi$ sur la composante σ-typique de H_μ est égale à

$$P_\sigma(\mu(f)\xi) = n_\sigma \mu(\chi_{\sigma^*} * f)\xi,$$

et $\chi_{\sigma^*} * f$ est exactement la projection de f sur la composante σ-typique de la représentation régulière gauche L de G sur $C_c(G)$. Donc $\chi_{\sigma^*} * f$ est non nul si et seulement si σ est un K-type à gauche de f. De même,

$$P_\sigma(\mu(f)^*\eta) = n_\sigma \mu(f * \chi_\sigma)^*\xi,$$

et $f * \chi_\sigma$ étant la projection de f sur la composante σ^*-typique de la représentation régulière droite R de G sur $C_c(G)$, il est non nul si et seulement si σ^* est un K-type à droite de f.

Soient $\mathcal{K}_{f,L}$ et $\mathcal{K}_{f,R^*}$ les deux sous-ensembles de $\widehat{K}$ définis par :

$$\mathcal{K}_{f,L} = \{\sigma \in \widehat{K} \,|\, \sigma \text{ est } K\text{-type à gauche de } f\}$$
$$\mathcal{K}_{f,R^*} = \{\sigma \in \widehat{K} \,|\, \sigma^* \text{est } K\text{-type à droite de } f\}.$$

Comme les projections P_σ sur les espaces σ-typiques sont des projections orthogonales (Lemme de Schur [16]), alors :

$$\|\mu(f)\|_{\mathcal{L}(H_\mu)} = \sup_{z,y} |\langle \mu(f)z, y\rangle|,$$

où z et y parcourent les vecteurs unitaires de H_μ tels que l'ensemble des K-types de z est contenu dans $\mathcal{K}_{f,R^*}$ et l'ensemble des K-types de y est contenu dans $\mathcal{K}_{f,L}$.

Soit (π, H) une représentation unitaire de G. On considère le produit tensoriel $(\rho \otimes \pi, V \otimes H)$.
Supposons maintenant que les K-types à gauche de f soient contenus dans l'ensemble des K-types de V et les K-types à droite de f soient contenus dans l'ensemble des K-types de V^*. Alors, $\mathcal{K}_{f,L} \subset \mathcal{I}$ et comme

$$\mathcal{K}_{f,R^*} \subset \{\sigma \in \widehat{K} \,|\, \sigma^* \text{est } K\text{-type de } V^*\},$$

on a aussi que $\mathcal{K}_{f,R^*} \subset \mathcal{I}$. D'où l'inégalité,

$$\|(\rho \otimes \pi)(f)\|_{\mathcal{L}(V \otimes H)} \leq \sup_{z,y} \Big| \int_G f(g) \langle (\rho \otimes \pi)(g) z, y\rangle dg \Big|,$$

où le supremum est pris parmi les vecteurs unitaires z, $y \in V \otimes H$ ayant des K-types appartenant à l'ensemble des K-types de V.

De plus, si H' est le sous-espace vectoriel de H formé des vecteurs dont les K-types sont parmi les K-types de $V \otimes V^*$, tout vecteur de $H \otimes V$ dont les K-types sont parmi ceux de V appartient à $H' \otimes V$ (car $\mathrm{Hom}_K(V \otimes V^*, H) = \mathrm{Hom}_K(V, V \otimes H)$, où Hom_K désigne l'espace des morphismes de représentations K-invariants). Donc l'inégalité (2) devient :

$$\|(\rho \otimes \pi)(f)\|_{\mathcal{L}(V \otimes H)} \leq \sup_{\xi,\eta} m^2 \int_G |f(g)| \|\rho(g)\|_{\mathrm{End}(V)} |\langle \pi(g)\xi, \eta\rangle| dg,$$

où ξ et η sont des vecteurs unitaires de H qui ont des K-types appartenant à l'ensemble des K-types de $V \otimes V^*$, $\mathcal{J}_G(\rho \otimes \rho^*)$.

Considérons une fonction ϕ continue, K-bi-invariante sur G et à valeurs dans $\mathbb{R}^+$, qui tend vers zéro à l'infini, donnée par le théorème 3.6. Alors on a pour toute représentation unitaire π qui ne contient pas la triviale :

$$\|(\rho \otimes \pi)(f)\|_{\mathcal{L}(V \otimes H)} \leq m^2 \sup_{\xi,\eta} \int_G |f(g)| \|\rho(g)\|_{\mathrm{End}(V)} \phi(g) \delta_K(\xi) \delta_K(\eta) dg,$$

où ξ et η parcourent les vecteurs unitaires de H qui sont K-finis et qui ont des K-types contenus dans $\mathcal{J}_G(\rho \otimes \rho^*)$.

■

On cherche maintenant une suite de fonctions $f_n \in C_c(G)$ ayant des K-types à gauche et à droite contenus dans $\mathcal{J}_{G\times G}(\rho \otimes \rho^*)$. Pour simplifier la notation, on note $\mathcal{J} := \mathcal{J}_{G\times G}(\rho \otimes \rho^*)$. On a le lemme suivant :

Lemme 3.9. *Il existe une matrice non nulle $E \in \mathrm{End}(V)$ et il existe une suite de fonctions $f_n \in C_c(G)$ ayant des K-types à gauche et à droite contenus dans $\mathcal{J}$ et une constante positive D telles que, pour tout entier n, le support de f_n soit contenu dans $G \backslash B_n$, $\lim_{n\to\infty} \rho(f_n) = E$ et*

$$\int_G |f_n(g)| \|\rho(g)\|_{\mathrm{End}(V)} dg \leq D.$$

Démonstration. On considère la décomposition de Cartan de $\mathfrak{g}$ donnée par la forme réelle compacte $\mathfrak{u}$. $\mathfrak{g}$ s'écrit alors

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p},$$

où $\mathfrak{k} = \mathfrak{g} \cap \mathfrak{u}$ et $\mathfrak{p} = \mathfrak{g} \cap i\mathfrak{u}$, et $\mathfrak{p}$ est non nul car G n'est pas compact. Alors pour tout $x \in \mathfrak{u}$, $\rho(x)$ est une matrice anti-hermitienne et pour tout $x \in i\mathfrak{u}$, $\rho(x)$ est hermitienne.
Soit $X \in \mathfrak{p}$ non nul et $a := \exp(X)$. Par conséquent $\rho(a) = \exp(\rho(X))$ est une matrice hermitienne (donc diagonalisable dans une base orthonormale de V) à valeurs propres strictement positives que l'on notera, sans tenir compte des multiplicités, $\nu_1, ..., \nu_m$, où $\nu_i \in \mathbb{R}_+^*$ pour tout $1 \leq i \leq m$.
De plus, comme ω est une représentation fidèle de G qui envoie U dans les matrices unitaires de $\mathrm{End}(V')$, $\omega(X)$ est une matrice hermitienne non nulle. On a que $l(\exp(tX)) = t\|\omega(X)\|_{\mathrm{End}(V')}$, car $\|\omega(\exp(tX))\|_{\mathrm{End}(V')} = \exp(t\|\omega(X)\|_{\mathrm{End}(V')})$, pour tout réel t. Quitte à remplacer a par a^k pour k un entier assez grand, on peut même supposer $l(a) \geq 2$.
Posons $a_n = a^n$, pour tout entier positif n. On a alors que $l(a_n) = n\|\omega(X)\|_{\mathrm{End}(V')} = nl(a)$, donc $l(a_n) \geq 2n$ et a_n appartient à $G \backslash B_n$.
De plus on a, pour tout n, $\rho(a_n) = \rho(a)^n$ est diagonalisable sur $\mathbb{R}$ dans la même base que $\rho(a)$ et ses valeurs propres sont ${\nu_1}^n, ..., {\nu_m}^n$. Comme

$\|\rho(a_n)\|_{\mathrm{End}(V)} = \max_{1\leq i\leq m}(\nu_i^n)$ et que $\nu_i > 0$, pour tout $i = 1...m$, on a que $\frac{\rho(a_n)}{\|\rho(a_n)\|_{\mathrm{End}(V)}}$ tend vers une matrice de $\mathrm{End}(V)$ non nulle, que l'on note E'.

Soit maintenant f une fonction continue positive à support compact sur G telle que $\int_G f(g)dg = 1$ et telle que le support de f soit contenu dans $B_1 \cap \{g \in G |\ \|\rho(g) - \mathrm{Id}\|_{\mathrm{End}(V)} \leq \frac{1}{2}\}$.
Soit f_n dans $C_c(G)$ définie de la façon suivante : pour tout g dans G

$$f_n(g) = \frac{f(a_n^{-1}g)}{\|\rho(a_n)\|_{\mathrm{End}(V)}}.$$

On a donc que $\mathrm{supp} f_n \subset a_n(\mathrm{supp} f)$ et f_n est dans $C_c(G)$, pour tout n. De plus, on a que pour tout g appartenant au support de f_n,

$$l(g) \geq l(a_n) - 1,$$

donc le support de f_n est contenu dans $G \backslash B_n$.
D'autre part, on voit facilement que

$$\rho(f_n) = \frac{\rho(a_n)}{\|\rho(a_n)\|_{\mathrm{End}(V)}} \int_G f(g)\rho(g)dg.$$

Posons $J := \int_G f(g)\rho(g)dg$. J est une matrice inversible de $\mathrm{End}(V)$. En effet, on a que

$$\begin{aligned}\|\int_G f(g)\rho(g)dg - \mathrm{Id}_{\mathrm{End}(V)}\|_{\mathrm{End}(V)} &\leq \int_G f(g)\|\rho(g) - \mathrm{Id}_{\mathrm{End}(V)}\|_{\mathrm{End}(V)}dg \\ &\leq \sup_{g\in\mathrm{supp}(f)} \|\rho(g) - \mathrm{Id}_{\mathrm{End}(V)}\|_{\mathrm{End}(V)} \\ &\leq \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

Par conséquent, $\rho(f_n)$ tend vers $E'J$ qui est encore une matrice non nulle de $\mathrm{End}(V)$.
Par ailleurs, on a que,

$$\begin{aligned}&\int_G f_n(g)\|\rho(g)\|_{\mathrm{End}(V)}dg \\ &\qquad\leq \frac{1}{\|\rho(a_n)\|_{\mathrm{End}(V)}} \int_G f(g)\|\rho(a_n)\|_{\mathrm{End}(V)}\|\rho(g)\|_{\mathrm{End}(V)}dg \\ &\qquad\leq \int_G f(g)\|\rho(g)\|_{\mathrm{End}(V)}dg \\ &\qquad\leq \frac{3}{2}.\end{aligned}$$

On a donc trouvé une suite de fonctions f_n dans $C_c(G)$, une matrice $E = E'J$ dans $\mathrm{End}(V)$ non nulle et une contante D tels que $\lim_{n\to\infty} \rho(f_n) = E$, $\int_G |f_n(g)|\|\rho(g)\|_{\mathrm{End}(V)}dg \leq D$ et tels que le support de f_n, pour tout n, soit contenu dans $G\backslash B_n$. On va montrer qu'on peut prendre les fonctions f_n ayant des K-types, à droite et à gauche, contenus dans $\mathcal{J}$.

Soit une fonction $f \in C_c(G)$. D'après la formule (3), qui donne la projection sur les composantes σ-typiques d'une représentation de G, pour $\sigma \in \widehat{K}$, la fonction $\tilde{f}$ définie par la formule suivante :

$$\begin{aligned}\tilde{f} &= \sum_{\phi_1,\phi_2 \in I} n_{\phi_1 \otimes \phi_2^*}(L \times R)(\chi_{\phi_1^* \otimes \phi_2}) \\ &= \sum_{\phi_1,\phi_2 \in I} n_{\phi_1}\chi_{\phi_1^*} * f * n_{\phi_2}\chi_{\phi_2^*}.\end{aligned}$$

est la projection de f sur les $K \times K$-types de $V \otimes V^*$.

On utilise ceci pour obtenir, pour tout n, une fonction $\tilde{f}_n$ qui est donnée par la projection de f_n sur les $K \times K$-types de $V \otimes V^*$. On a alors une suite de fonctions $(\tilde{f}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ayant des K-types à gauche et à droite appartenant à $\mathcal{J}$.

On va maintenant vérifier que la nouvelle suite satisfait les conditions du lemme 3.9.

L'application $\rho : C_c(G) \to \mathrm{End}(V) \backsimeq V \otimes V^*$ est un morphisme de représentations de $G \times G$ et, pour tous t, t' dans G le diagramme suivant commute :

$$\begin{tikzcd} C_c(G) \arrow[r, "\rho"] \arrow[d, "(L\times R)(t,t')"'] & V \otimes V^* \arrow[d, "(\rho\otimes\rho^*)(t,t')"] \\ C_c(G) \arrow[r, "\rho"'] & V \otimes V^* \end{tikzcd}$$

Par conséquent, comme $\lim_{n\to\infty} \rho(f_n) = E$, $\lim_{n\to\infty} \rho(\tilde{f}_n)$ est égal à la projection de E sur les $(K \times K)$-types de $V \otimes V^*$, et cette projection n'est rien d'autre que E elle même, c'est à dire que $\lim_{n\to\infty} \rho(\tilde{f}_n) = E$.

De plus, on a que,

$$\begin{aligned}&\int_G |\tilde{f}_n(g)| \|\rho(g)\|_{\mathrm{End}(V)} dg \\ &\qquad \leq \int_G \sum_{\phi_1,\phi_2 \in I} n_{\phi_1}.n_{\phi_2^*} \int_{K\times K} |\chi_{\phi_1^*}(t)\chi_{\phi_2}(t')||f_n(t^{-1}gt')|\|\rho(g)\| dt dt' dg \\ &\qquad \leq \sum_{\phi_1,\phi_2 \in I} n_{\phi_1}.n_{\phi_2^*} \int_{K\times K} |\chi_{\phi_1^*}(t)\chi_{\phi_2}(t')| \int_G |f_n(t^{-1}gt')|\|\rho(g)\| dg dt dt' \\ &\qquad \leq D \sum_{\phi_1,\phi_2 \in I} n_{\phi_1}.n_{\phi_2^*} \int_{K\times K} |\chi_{\phi_1^*}(t)\chi_{\phi_2}(t')| dt dt' \\ &\qquad \leq D',\end{aligned}$$

où D' est une constante qui ne dépend pas de n. Comme le support de $\tilde{f}_n$ est contenu dans $K(\mathrm{supp} f_n)K$ pour tout n, et les B_n sont invariants par l'action à gauche et à droite de K, le support de $\tilde{f}_n$ est contenu dans $G \backslash B_n$. ■

Soient maintenant $E \in \mathrm{End}(V)$ non nulle et $f_n \in C_c(G)$ tels que $\lim_{n\to\infty} \rho(f_n) = E$, avec le support de f_n contenu dans $G \backslash B_n$, f_n ayant des K-types à gauche et à droite contenus $\mathcal{J}$, et tels que $\int_G |f_n(g)| \|\rho(g)\|_{\mathrm{End}(V)} dg \leq D$,

pour une constante D qui ne dépend que de E.
D'après le lemme 3.8, si π est une représentation unitaire de G qui ne contient pas la triviale, on a que, pour tout entier naturel n,

$$\|(\rho\otimes\pi)(f_n)\|_{\mathcal{L}(V\otimes H)} \leq m^2 \sup_{\xi,\eta}\int_G |f_n(g)|\|\rho(g)\|_{\mathrm{End}(V)}\phi(g)\delta_K(\xi)\delta_K(\eta)dg,$$

où ξ et η parcourent les vecteurs unitaires de H qui ont des K-types contenus dans l'ensemble des K-types de $V\otimes V^*$ et ϕ est une fonction continue et positive sur G qui s'annule à l'infini et qui ne dépend ni de f_n ni de π.
De plus, on a une constante positive D telle que $\int_G |f_n(g)|\|\rho(g)\|_{\mathrm{End}(V)} \leq D$ et, comme le support de f_n est contenu dans $G\backslash B_n$, l'inégalité au-dessus s'écrit :

$$\|(\rho\otimes\pi)(f_n)\|_{\mathcal{L}(V\otimes H)} \leq m^2 D \sup_{\xi,\eta}\sup_{g\in G\backslash B_n}\phi(g)\delta_K(\xi)\delta_K(\eta), \tag{4}$$

où ξ et η parcourent les vecteurs unitaires de H qui ont des K-types appartenant à l'ensemble des K-types de $V\otimes V^*$, ensemble qui ne dépend pas de n.
On veut montrer que le membre de droite de cette inégalité tend vers zéro quand n tend vers l'infini. Pour ceci, on a besoin du lemme suivant qui assure que, pour tout $v\in H$ ayant des K-types contenus dans un ensemble fixé S, la dimension du sous-espace de H engendré par l'action de K sur v, que l'on note $\delta_K(v)$, est bornée en fonction de S.

Lemme 3.10. *Soit $v\in W$, où (μ,W) est une représentation de K. Alors,*

$$\delta_K(v)=\dim\langle Kv\rangle \leq \sum_{[\sigma]}(\dim\sigma)^2,$$

où la somme est prise parmi les $[\sigma]\in\widehat{K}$ qui sont des K-types de v.

Démonstration. Soit $C_r^*(K)$ la C*-algèbre réduite de K. Toute représentation irréductible σ de K, apparait $\dim(\sigma)$ fois dans la décomposition de la représentation régulière de K en somme directe de représentations irréductibles (cf. [16]). En fait, l'application

$$\begin{aligned} C_r^*(K) &\xrightarrow{\simeq} \bigoplus_{[\sigma]\in\widehat{K}}\mathrm{End}(H_\sigma)\\ f &\mapsto (\sigma(f))_\sigma, \end{aligned}$$

est un isomorphisme de C*-algèbres. Soit ψ le morphisme de $C_r^*(K)$ vers W qui envoie f dans $\mu(f)v\in\langle Kv\rangle$. On a donc que,

$$\begin{aligned}\langle Kv\rangle &= \psi(C_r^*(K))\\ &= \psi(\bigoplus_{[\sigma]\in\widehat{K},}\mathrm{End}(H_\sigma)),\end{aligned}$$

où la somme directe est prise parmi les $[\sigma]$ qui sont des K-types de v.
On a alors que

$$\dim\langle Kv\rangle \leq \sum_{[\sigma]}(\dim\sigma)^2,$$

où la somme est prise parmi les $[\sigma]\in\widehat{K}$ qui sont des K-types de v. ∎

Maintenant on est prêt pour conclure. Le membre de droite de (4) tend vers zéro quand n tend vers l'infini, car la fonction ϕ tend vers zéro à l'infini, et donc la norme de $(\rho\otimes\pi)(f_n)$ tend vers zéro quand n tend vers l'infini.
On a donc trouvé une matrice E non nulle dans $\mathrm{End}(V)$ et une suite de fonctions f_n dans $C_c(G)$ tels que $\lim_{n\to\infty}\rho(f_n)=E$ et le supremum sur toutes les représentations unitaires π de G, qui ne contiennent pas la triviale, de $\|(\rho\otimes\pi)(f_n)\|_{\mathcal{L}(V\otimes H_\pi)}$ tend vers zéro quand n tend vers l'infini. Ceci termine la démonstration du lemme 3.4, donc celle du théorème 3.1. Par la proposition 2.7, G a alors la propriété (T) tordue par ρ, ce qui termine la démonstration du théorème 1.2 énoncé dans l'introduction. ■

Références

[1] Akemann, C. A., and M. E. Walter, Unbounded Negative Definite Functions, Can. J. Math., **33** (1981), 862–871.

[2] Dixmier, J., "C*-algebras," North-Holland Publ., Amsterdam, 1977.

[3] Duistermaat, J. J., and J. A. C. Kok, "Lie Groups," Springer-Verlag, Berlin etc., 1942.

[4] Cowling, M., Sur les coefficients des représentations unitaires des groupes de Lie semi-simples, in : P. Eymard, J. Faraut, G. Schiffmann, and R. Takahashi, eds., Analyse Harmonique sur les Groupes de Lie II (Séminaire Nancy-Strasbourg 1976–78), Lecture Notes in Mathematics (Springer-Verlag) **739** (1979), 132–178.

[5] Fell, J. M. G., and R. S. Doran, "Representations of *-Algebras, Locally Compact Groups, and Banach *-Algebraic Bundles, Volume 1 : Basic Representation Theory of Groups and Algebras," Academic Press, 1988.

[6] Fisher, D., and T. Hitchman, Strengthening Kazhdan's Property (T) by Bochner Methods, Preprint, arxiv :math.DG/0609663.

[7] Gomez-Aparicio, M. P., Property (T) and tensor products by irreducible finite dimensional representations for $SL_n(\mathbb{R})$, $n\geq 3$, à paraître dans Contemporary Mathematics, Amer. Math. Soc..

[8] Howe, R. E., On a notion of rank for unitary representations of the classical groups, in : Harmonic analysis and group representations, C.I.M.E., 1980, 223–331.

[9] de la Harpe, P., and A. Valette, "La propriété (T) de Kazhdan pour les groupes localement compacts," Astérisque **175**, 1989.

[10] Kazhdan, D. A., Connection of the dual space of a group with the structure of its closed subgroups, Functional Analysis and its Applications **1** (1967), 63–65.

[11] Knapp, A. W., "Representation theory of semi-simple groups," Princeton University, 1986.

[12] —, "Lie Groups Beyond an introduction," Birkhäuser, 1996.

[13] Lang, S., "Algebra," Springer-Verlag, New York,etc., 2002.

[14] Margulis, G. A., "Discrete subgroups of semisimple Lie groups," Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete (3) **17**, Springer-Verlag, Berlin, 1991.

[15] Oh, H., Uniform pointwise bounds for matrix coefficients of unitary representations and applications to Kazhdan constants, Duke Math. J. **113** (2002), 133–192.

[16] Serre, J. P., "Représentations linéaires des groupes finis," Paris, Hermann, 1971.

[17] Valette, A., Projections in full C^*-algebras of semisimple Lie groups, Math. Ann. **294** (1992), 277–287.

Maria-Paula Gomez-Aparicio
Institut de Mathmatiques de Jussieu
175 rue du Chevaleret
75013 Paris
gomez@math.jussieu.fr

Received October 19, 2006
and in final form March 17, 2007